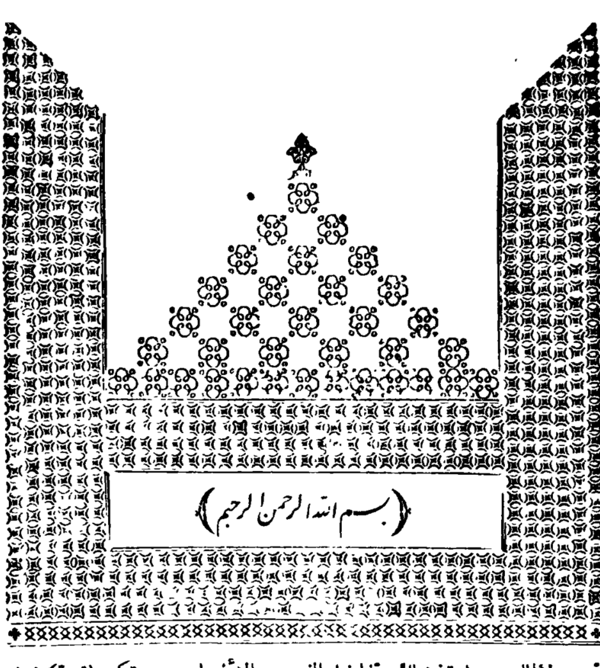
THE BOOK WAS DRENCHED

حساب التفاضل والتكامل

ترجمة الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم
الفلكية بمدرسة المهندسخانة
الخديوية الكائنة ببولاق
مصر المحمية

*



نحمدك اللهم على تفضلك بتفاضل النسب والأنساب * وتكرمك بتكامل مارزقته بغير حساب * ونصلى ونسلم على نبيك الذى جاء بالدوال القواطع * وبلغت النهاية الكبرى معجزاته السواطع * هندوس انباء انبياء الامم الخاليه * ومهندس مجارى بحر الشريعة بالهندسة العاليه * من أقام بما ارشدنا اليه من اساس معرفتك الحدود * ورسم جيوب ظل كرمك الظليل الممدود * صلى الله وسلم عليه وعلى آله الواصلين الى طريق النهايات * واصحابه البالغين فى كميات المعادلات اقصى الغايات * وبعد فيقول الفقير محمود بن احمد مدرس العلوم الفلكيه * فى مدرسة دار الهندسة الداورية الملكيه * الكائنة ببولاق مصر المحروسه * صرف الله عنها اكداره الدهر وبؤوسه * ان مكارم الحضرة الآصفية الخديويه * والدولة المحمدية العلويه * قد تدفق بحر احسانها المديد الكامل وعم الديار المصرية بفيضه العميم الشامل * فرد على مملكتها ضالتها * واعاد اليها

تيهها على غيرها ودالتها * بانشاء ما أبدع من الآثار الحسنة الجميله * والمآثر الجلية الجليله * التى لا تحصر ولا تحصى * ولا تستقرى ولا تستقصى * مع تجديد ما درس من معالم العلوم والفنون * واظهار ما خفى من سرها المصون المكنون * حيث اوجدها فيها بأسرها * واحياها بحشرها ونشرها * بعد ان محيت آثارها مددا مديده * وعفت رسومها ازمنة عديده * حتى ألبسها حلة الكمال * وأفرغها فى قالب الحسن والجمال * فكانت سبيكة ابريز * وما ذلك على العزيز بعزيز * ولما كان العلم الرياضى من أحسن تلك العلوم وابهاها * وابهج هاتيك الفنون وازهاها * وكنت مذ دخلت هذه المدرسة وأنا فى عداد التلامذه * ما فتئت اتعلم حتى صرت فيها من الأساتذه * وقمت بوظيفة التدريس مدة سنين * مستظلا بظل الاحسان والله يحب المحسنين * تعاملت مع الطلبة احسن التعامل * وأقرأتهم كتاب الموسيو يوشارلا فى حساب التفاضل والتكامل * وحيث انى لوحظت بأعين العنايه * ويسر لى الله سبيل الهدايه * بادرت الى عبارته الفرنساوية بالترجمة والتعريب * ونظمتها فى سلك براعة التسهيل والتقريب * حيث بسطت بعض العبارات * ووضحتها زيادة على ما فى الاصل من الاشارات * وجعلتها على طرف الثمام للمجتدى * لتتناولها يد الطالب المبتدى * ونزهتها عن العجر والبجر * ومثلتها طبعا بمطبعة الحجر ثم انى ضممت اليها درر فوائد * تعد فى سمطها فرائد * يكثر نفعها فى علم المكانيك وغيره * مما يلوح وجه ثمرته وخيره * والحقت بها نبذة فى علم الضوء جليلة الشان * قد ألفها جناب ناظر مدرستنا الآن * وهو حضرة لامبير بيك صاحب البراعه * المحرز لقصب السبق فى ميادين البراعه * ولما كانت تلك الترجمة كتابا عظيما * وصارت بهاتين الضميمتين عقدا نظيما * وكان الجناب العالى * ذو الهمم والمعالى * من هو الفرد الجامع بين المعارف والعوارف * والتالد من المجد والطارف * العارف بأفنان الفنون منطوقا ومفهوما * اميرالوآء ادهم بيك مدير المدارس عموما * قد شرفها باطلاعه الشريف عليها * واسعدها بنظره السعيد اليها * صدر بامره الكريم بطبعها * ارادة لتكثير ثمرتها ونفعها * حيث

انس منها رشدها * وعلم انها قد بلغت اشدها * فدونكها ايها الطالب * يسر الله لى ولك كل المطالب * امين اللهم امين * يارب العالمين

(مقدمه)

قال المؤلف ان من نظر فى تاريخ المعارف وجد فيه ان القريحة البشرية تقف اوقاتا بعد ان ترتقى الى أعلى الادراكات والاختراعات كأن مانعا يمنعها من ارتقائها ثم تعود وترتقى ثانيا بقوة اخرى فتظهر باستكشاف عظيم من الاستكشافات التى تتغير بها صورة العلم بالكلية * وان من هذا القبيل مااخترعه المعلم ديكارته اوديكارتوس من تطبيق الجبر على الهندسة فانه افتتح بذلك طريقا كانت مجهولة لاسلافه من العلماء * ومنه ايضا مااغرب به المعلم نوطون والمعلم لبنتز على علماء بلاد اوربا من اختراع تحليل اخر اعلى درجة من هندسة المعلم ديكارته اذلا يتيسر استكشاف اخر يكون به تشريف العقل البشرى مثله حيث صار اللانهائى الذى هو مجرد تخيل مستطيعا للحساب فنتجت منه الاعاجيب وقد اراد بعض من الفلاسفة ان يوقعوا التشكك فى صحة هذا التحليل العجيب فلم يبلغوا ذلك ولم يتيسر لهم ان ينكروا نتائجه ولم يترتب على ذلك الا زيادة حث علماء الهندسة على زيادة بذل الجهد فى البحث عن حقيقة الوجود الفكرى للحسابات الجديدة وكان اول من علم هذا السر هو المعلم نوطون حيث جعل حساب التفاضل طريقة للوصول الى اول نسب الكميات واخرها اعنى جعلها طريقة للوصول الى نهايات النسب ثم جاء المعلم دلمبير فرأى ان تصورات المعلم نوطون مشتملة على حقيقة الوجود الفكرى لحساب التفاضل واثبت انه يتيسر بواسطة طريقة النهايات ان يحصل التوضيح الكافى للطريقة الموجودة عند الانكليز بقطع النظر عن التحرك الذى هو معنى لاتعلق له بحساب التفاضل وقد تكلم فوج من علماء الهندسة قبل المعلم دلمبير فى مؤلفاتهم على طريقة النهايات منهم المعلم كوزان خصوصا ولكن لم يحصل الاتضاح التام وازالة الشك بالكلية عن الوجود الفكرى لطريقة الصغيرات جدا التى هى عبارة عن اختصار طريقة النهايات الا منذ حصل اثباتها بواسطة نظرية

المعلم

المعلم تيلور

وبالنظر الى هذا المعنى ليست طريقة الصغيرات جدا الاعبارة عن طريقة مستقربة لايجاد تفاضلات الدوال المتنوعة وبها تنطبع تلك التفاضلات فى الاذهان بواسطة اشكال هندسية فى غاية البساطة والاختصار تظهر للعقل على وجه اوضح من التصورات المطلقة التخيلية وبالجملة فهذه الطريقة تصير ضرورية لابد منها ولاغنى عنها فى الفروع العالية من علم الميكانيك والفلك اذ بدونها يكون حل المسائل العملية من المشكلات الصعبة فى اغلب الاحيان ومن ثم كان افاضل علماء الهندسة يستعملونها كثيرا فى مؤلفاتهم

وقد كان فيما سلف من الزمان لهذه الطريقة ولوفى الوجود الفكرى محامون قد بذلوا الجهد فى الذب عنها وذلك لما انه اذا التزم الانسان السلوك فيها على مقتضى بعض دعاوى مخصوصة تظهر عليها علامة الصحة والضبط الرياضى التام ويتراءى عليها انها ناتجة بالطبع عن اصل عام وقاعدة كلية ترجع اليها وهذه القاعدة المذكورة لم تزل الى الآن معتبرة من الضروريات لكن لما رأيت اننا اذا اعتبرنا اللانهائى بالوجه المقرر فيها نجد انه ينتج عنها نتائج لا يمكن قبولها استحسنت ان ابرهن عليها جاعلا لطريقة الصغيرات جدا اصلا آخر هو مبنى كذلك على ما علمنا من الفوائد المتعلقة باللانهائى اذ هو اقرب الى الصواب بسبب تصور النهايات التى توجد فيه ضمنا

واذا كانت طريقة النهايات متممة لطريقة الصغيرات جدا بسبب ما يوجد فيها من الخلل فان طريقة المعلم لاجرانجه متممة كذلك لطريقة النهايات وذلك بربط المعاملات التفاضلية بالجبر المحض ولا بأس بجعل هذه الطرائق الاربع كأنها طريقة واحدة ولذلك اذا قابلتها ترى ان الاصول الناتجة عنها مشتركة بين جميعها وان من اراد فهمها كما هى ليس عليه الا ان يضم شيأ قليلا الى طريقة النهايات فقط وتؤول طريقة المعلم لاجرانجه حينئذ الى ان تكون عبارة عن نظرية صارت سهلة جدا حيث غيرت طريقة اثباتها

ولم التزم توضيح النظريات المتنوعة التى تتركب منها هذه الرسالة وانما التزمت

توضيح سائر العمليات كما سلكت هذا المسلك فى سائر مؤلفاتى الرياضية لما انى متحقق ان تركها الا يترتب عليه زيادة الاعتقاد فى كثرة معارف المؤلف وان المؤلف انما يعرف مقامه بما يبديه من كيفية الدلالة على تصوراته وبما يقرره من الملحوظات المخترعة فى مؤلفاته

ولنضم الى ما قررناه انه اذا التزم عدم ترك التصورات المتخللة فى صلب النظريات لا يمكن اجتناب التطويل بل المحل بها الا بواسطة الضبط والتحرير ويزيد الامر اشكالا اذا كان بعض الكتاب معدا للبرهنة على المسائل وابداء اسبابها ومن اطلع على كثرة المواد المتنوعة المقررة فى هذا الكتاب عرف حق المعرفة مايصدر لى من الموانع فى تأليفى له ومن الزيادات التى تممتها الى هذا الكتاب فى هذه الطبعة الجديدة مسألة النقط الغريبة والنهايات الكبرى والصغرى للدوال ذات المتغيرتين والمنحنيات القطبية ونظرية المتغيرة المستقلة اوالتى ليست بمعلقة والحلول الخصوصية للمعادلات التفاضلية وتكعيب الاجسام المنتهية بالسطوح المنحنية وتربيع السطوح المذكورة وشروط تكامل الدوال ذات الثلاث متغيرات والمعادلات التفاضلية بدرجة ثانية والمعادلات المتماثلة وغير ذلك وبالجملة فقد ختمت هذا المؤلف بقضية تتعلق بالمعادلات التفاضلية الجزئية مع بعض ملحوظات عمومية على الدوال الاختيارية تتم بها تكاملات تلك المعادلات وبهذا توصلت الى شرح الطريقة التى تتعين بها الدالة الاختيارية التى تدخل فى المعادلة عند توفر معادلات الشرط واعلامها

والطريقة التى بحثت بها عن تلك المسألة المهمة معتبرا السطوح المنحنية تشابه الطريقة التى استعملتها باعتبار الثوابت الاختيارية ولذا بينت بواسطة المنحنيات كيف توجد الثابتة بعينها للتكامل بعد ان حذفت تلك الثابتة عند اخذ التفاضل وهى مسألة يظهر لى انه لم يحظ بها احد قبلى

حساب

حساب التفاضل

تفاضل الكميات الجبرية

* ١ * حساب التفاضل يبحث فيه عن النتائج التى تنشا عن الكميات اذا اخذ بعض متغيراتها زيادة مّا وللمتغير ماصح تغيره فى المعادلة كما ان الثابت مائبت على حالة غير متغيرة بطول العملية معلوما كان او مجهولا ويقال للمتغير دالة لمتغير اخر متى ساوى الاول كمية حسابية يدخل فيها الثانى بارتباط اياما كان فان ص فى معادلات

$$\text{ص} = \sqrt{\text{ح}^{2} - \text{س}^{2}} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{س}^{3} - 3\,\text{ب}\,\text{س}^{2}$$

$$\text{و} \quad \text{ص} = \text{ح}\,\text{س}^{2} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{ب} + \text{ح}\,\text{س}^{3}$$ هى دالة س

* ٢ * ولنعتبر دالة فى حالة ازديادها بازدياد المتغير الشاملة هى له فان كل دالة لمتغير س يمكن بيانها براسى منحن س م مَ (شكل ١) وليكن لاجل ذلك اح = س و ح م = ص ونفرض ان الافقى اح يأخذ زيادة ح حَ = هـ فالراسى ح م يصير عند ذلك حَ مَ = صَ ولاجل ايجاد مقدار هذا الراسى الجديد يشاهد انه يلزم تغيير س بكمية س + هـ فى معادلة المنحنى ومقدار ص الذى يستخرج منها يكون هو عين مقدار صَ فاذا كانت معادلة ص = م س² مثلا يوجد صَ بتغيير س بكمية س + هـ و ص بآخر صَ ويكون

$$\text{صَ} = \text{م}\,\text{س}^{2} + 2\,\text{م}\,\text{س}\,\text{هـ} + \text{م}\,\text{هـ}^{2}$$

* ٣ * ولنأخذ الآن معادلة

$$\text{ص} = \text{س}^{3} \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

ونفرض فيها ان ص تصير صَ حين تتغير كمية س بكمية س + هـ فيحدث لنا

$$\text{صَ} = (\text{س} + \text{هـ})^{3}$$ وبحلها يوجد

$$\text{صَ} = \text{س}^{3} + 3\,\text{س}^{2}\,\text{هـ} + 3\,\text{س}\,\text{هـ}^{2} + \text{هـ}^{3}$$

وبطرح معادلة (١) من هذه المعادلة يوجد

$$\text{صَ} - \text{ص} = 3\,\text{س}^{2}\,\text{هـ} + 3\,\text{س}\,\text{هـ}^{2} + \text{هـ}^{3}$$ وقسمتها

على هـ يوجد

$$\frac{صَ - ص}{هـ} = ٣ س^٢ + ٣ س هـ + هـ^٢ \cdots\cdots (٢)$$

وحيث كانت كمية صَ ـ ص تبين الزيادة التى تأخذها كمية ص حين تزداد كمية س بمقدار هـ يعلم من ذلك ان كمية $\frac{صَ - ص}{هـ}$ هى نسبة الزيادة التى تأخذها الدالة المفروضة ص الى الزيادة التى يا خذها متغير س

واذا نظرنا الى الطرف الثانى من هذه المعادلة فنشاهد أن هذه النسبة تأخذ فى النقصان كلما نقصت كمية هـ وحين تصير كمية هـ صفرا تؤول هذه النسبة الى ٣ س^٢ ويعلم من ذلك ان حد ٣ س^٢ هو نهاية النسبة $\frac{صَ - ص}{هـ}$ وهذا الحد هو الذى ينحى نحوه كلما اخذ هـ فى النقص

٤ لكنه بفرض هـ = ٠ تؤول كمية صَ ـ ص الى صفر ايضا فمعادلة (٢) تؤول حينئذ الى هذه

$$\frac{٠}{٠} = ٣ س^٢ \cdots\cdots\cdots (٣)$$

ولا استحالة فى هذه المعادلة لانه يفهم من الجبر ان $\frac{٠}{٠}$ قد يكون دالا على سائر انواع الكميات فتارة يستدل به على كمية محدودة وتارة يبين كمية غير محدودة وتارة يكون صفرا ولك ان تقول انه حيث كانت قيمة الكسر لا تتغير بقسمة حديه على عدد واحد ينتج ان تصغير الحدين غير ضار فى مقداره و ينبنى على ذلك ان حقيقة الكسر لا تتغير اذا بلغ حداه النهاية فى الصغر يعنى اذا انعدما وكسر $\frac{٠}{٠}$ الذى يوجد فى معادلة (٣) هو عبارة عن رسم حل محل نسبة زيادة الدالة الى زيادة المتغير وحيث لم يبق هذا الرسم اثرا للمتغير المذكور لزم ابداله برمز $\frac{د ص}{د س}$ ليعلم به ان الدالة كانت ص والمتغير كان س

و د ص و د س يتغير اعتبارهما فى الحقيقة على حسب جنس المسألة فقد يعتبران اصفارا اعداما وقد يعتبران كميات صغيرة جدا و يوجد اذ ذاك

د ص

$$\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}} = ٣\ \text{سـ}^٢ \quad \ldots\ldots\ldots (٤)$$

كمية $\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ اومقدارها الذى هو ٣ سـ^٢ هو المسمى العامل اوالمكرر التفاضلى للدالة المفروضة

* ٥ * وليتنبه انه حيث كان $\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ هو الرمز الدال على كمية ٣سـ^٢ التى هى حد النسبة اونهايتها كما تبينه معادلة (٤) فكان الواجب ان يبق وسـ موضوعا تحت وصـ لكن نظرا لسهولة العمليات الجبرية يحذف مقام معادلة (٤) عند اللزوم ويحدث منها اذن وصـ = ٣سـ^٢ وسـ وكمية ٣ سـ^٢ وسـ هى التى تسمى تفاضل الدالة المفروضة صـ

* ٦ * للبحث عن تفاضل دالة حـ + ٣ سـ^٢ بالوجه المشروح نضع صـ = حـ + ٣ سـ^٢

ثم نغير كمية سـ بكمية سـ + هـ ونرمز للناتج بحرف صـَ فيوجد صـَ = حـ + ٣ سـ^٢ + ٦ سـهـ + ٣ هـ^٢

وبطرح معادلة صـ = حـ + ٣ سـ^٢ من هذه المعادلة يوجد صـَ ــ صـ = ٦ سـهـ + ٣ هـ^٢ وبالقسمة على هـ يكون

$\frac{\text{صـَ ــ صـ}}{\text{هـ}}$ = ٦ سـ + ٣ هـ ثم يجعل هـ = ٠ فيوجد

$\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ = ٦ سـ واذن يكون التفاضل المطلوب وصـ = ٦ سـ وسـ

* ٧ * ولنمثل بمثال ثالث فنبحث عن تفاضل صـ = حـ سـ^٣ ــ و^٣ ولذلك نبدل سـ بكمية سـ + هـ فيوجد

صـَ = حـ سـ^٣ + ٣ حـ سـ^٢ هـ + ٣ حـ سـ هـ^٢ + حـ هـ^٣ ــ و^٣ واذن يكون

$\frac{\text{صـَ ــ صـ}}{\text{هـ}}$ = ٣ حـ سـ^٢ + ٣ حـ سـ هـ + حـ هـ^٢ وحين نرتقى الى النهاية نجد

وص / وس = ٣ حس^{٢} وهذا هو المكرر التفاضلي للدالة المفروضة والتفاضل

يكون وص = ٣ حس^{٢} وس

* ٨ * نفرض ايضا ان المراد ايجاد تفاضل ص = (١ ـ س^{٣}) / (١ ـ س)

ولذلك نجرى عملية القسمة فيحدث لنا ص = ١ + س + س^{٢}

ثم نضع س + هـ محل س و صَ محل ص فيحدث

صَ = ١ + س + هـ + س^{٢} + ٢ سهـ + هـ^{٢} وبترتيب هذه بالنسبة

الى هـ يكون صَ = ١ + س + س^{٢} + (١ + ٢س) هـ + هـ^{٢}

ومن هذا يستخرج (صَ ـ ص) / هـ = ٢ س + ١ + هـ وفى النهاية يوجد

وص / وس = ٢ س + ١

وتفاضل كمية (١ ـ س^{٣}) / (١ ـ س) يكون حينئذ (٢ س + ١) وس

* ٩ * ولنمثل ايضا بهذا المثال

ص = (س^{٢} ـ ٢ ح^{٢}) (س^{٢} ـ ٣ ح^{٢}) ولذلك نحل الطرف الثانى فنجد

ص = س^{٤} ـ ٥ ح^{٢} س^{٢} + ٦ ح^{٤} ونضع س + هـ محل س و صَ

محل ص ثم نرتبه بالنسبة الى هـ فيوجد

صَ = س^{٤} ـ ٥ ح^{٢} س^{٢} + ٦ ح^{٤} + (٤ س^{٣} ـ ١٠ ح^{٢} س) هـ

+ (٦ س^{٢} ـ ٥ ح^{٢}) هـ^{٢} + ٤ س هـ^{٣} + هـ^{٤} واذن يكون

(صَ ـ ص) / هـ = ٤ س^{٣} ـ ١٠ ح^{٢} س + (٦ س^{٢} ـ ٥ ح^{٢}) هـ

+ ٤ سهـ^{٢} + هـ^{٣} وبالارتقاء الى النهاية يوجد

وص / وس = ٤ س^{٣} ـ ١٠ ح^{٢} س وبالضرب فى وس يظهر أن

التفاضل المطلوب يكون وص = (٤ س^{٣} ـ ١٠ ح^{٢} س) وس

* ١٠ * وس هى بنفسها تفاضل كمية س لانه اذا

فرض ص = س يوجد صَ = س + هـ ويكون

ص

صَ ـ ص = هـ وبالقسمة على هـ يوجد $\frac{صَ - ص}{هـ} = ١$

وحيث لم تكن كمية هـ داخلة فى الطرف الثانى من هذه المعادلة يظهر أنه

يكفى لاجل الانتقال الى النهاية أن يغير $\frac{صَ - ص}{هـ}$ برمز $\frac{وص}{وس}$ وعلى

ذلك يكون $\frac{وص}{وس} = ١$ ومنه وص = وس

* ١١ * وليتأمل انه فى بعض الاوقات تكون زيادة المتغير سلبية وفى هذه الحالة يلزم استبدال كمية س بكمية س ـ هـ ويفعل كما تقدم

فلايجاد تفاضل ح $س^٣$ مثلا حين تكون الزيادة سلبية تغير س بكمية س ـ هـ فيوجد

$صَ = ح س^٣ - ٣ ح س^٢ هـ + ٣ ح س هـ^٢ - ح هـ^٣$ واذن يكون

$\frac{صَ - ص}{هـ} = - ٣ ح س^٢ + ٣ ح س هـ - ح هـ^٢$ ثم

يوجد بالانتقال الى النهاية $\frac{وص}{وس} = - ٣ ح س^٢$ ومنه

$وص = - ٣ ح س^٢ وس$ وحيث انه لو كانت الزيادة موجبة لوجد $وص = ٣ ح س^٢ وس$

يفهم من ذلك انه لايجاد التفاضل حين تكون الزيادة سلبية يلزم تغيير اشارة وس فى التفاضل الموجود بفرض الزيادة موجبة

* ١٢ * ولنقدم قبل التجوّن فى العلم تنبيها لابد منه وذلك انه اذا غيرت س بكمية س + هـ فى معادلة بهذه الصورة

ص = ک(س)

يعنى طرفها الثانى دالة لهذا المتغير ثم رتب الناتج بحسب الدرجات التصاعدية لكمية هـ فالحد الاول منه يكون مساويا لكمية ص

ولذلك نفرض انه بعد تغيير س بكمية س + هـ وترتيب الناتج

وقد رمزت للدالة بأول حرف منها وهو الدال هكذا ک اوهكذا د اوهكذا ى وربما وضعت فوقها اوتحتها علامات او ارقام على حسب المقام فتعتبر كلها دوال متغايرة

يوجد الحل صَ = ع + حه + ءه^٢ + ره^٣ + ... الخ
فأقول انه لابد وان يكون ع = ص
لانه بفرض ه = ٠ فى المعادلة الاخيرة يؤول طرفها الثانى الى
ع ويؤول طرفها الاول الى ص لان ص انما صارت صَ
بسبب التغير الذى لحقها من تغير س بكمية س + ه فبانعدام ه
ترجع صَ ضرورة الى حالتها الاولى وهى ص وينتج من ذلك ان ص
= ع

* ١٣ * وبذلك يتوصل الى شرح كيفية تعميم طريقة التفاضل فانه
اذا غيرنا س بكمية س + ه فى معادلة ص = د (س)
التى لم تعين فيها الكمية المبينة برمز د (سَ) (بل صرف النظر عن تعيينها
لزيادة التعميم) وفرضنا ان الناتج يكون مرتبا بحسب الدرجات التصاعدية
لكمية ه وكان هذا الناتج
صَ = ع + حه + ءه^٢ + ره^٣ + ... الخ
ثم وضع فيه ص بدلا عن ع المساوية لها كما تقدم برهانه فى (١٢)
وحدث صَ = ص + حه + ءه^٢ + ره^٣ + ... الخ أو
(صَ − ص)/ه = ح + ءه + ره^٢ + ... الخ وفرضنا
ه = ٠ فى النهاية كان وص/وس = ح
ومن هذا يفهم ان المكرر التفاضلى يساوى مكرر الحد المحتوى على كمية
ه بدرجة اولى فى حل د (س + ه) المرتب بحسب الدرجات
التصاعدية لكمية ه

(تفاضل حاصل ضرب متغيرين)

* ١٤ * لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين نعتبر دالتين مختلفتين
لمتغير واحد س ونرمز لهما بحرفى ص و ع ثم نغير فى كل منهما
متغير س بكمية س + ه ونرمز للنواتج بحرفى صَ و عَ

ونفرض

ونفرض انهما يكونان بعد الترتيب بالنسبة الى هـ هكذا

$$ص' = ص + ح هـ + ء هـ^٢ + ر هـ^٣ + \cdots\cdots \text{الخ} \quad (٥)$$

$$ع' = ع + ح' هـ + ء' هـ^٢ + ر' هـ^٣ + \cdots\cdots \text{الخ} \quad (٦)$$

فبالارتقاء الى النهاية يوجد

$$\frac{و ص}{و س} = ح \quad و \quad \frac{و ع}{و س} = ح' \cdots\cdots\cdots (٧)$$

وبضرب معادلتى (٥) و (٦) فى بعضهما يوجد

$$ع' ص' = ع ص + ع ح هـ + ع ء هـ^٢ + \text{الخ}$$
$$+ ص ح' هـ + ح ح' هـ^٢ + \text{الخ}$$
$$+ ص ء' هـ^٢ + \text{الخ}$$

ثم انه اذا طرح ع ص من كل من الطرفين وقسم الخارج على هـ يوجد

$$\frac{ع' ص' - ع ص}{هـ} = ح ع + ح' ص + (ء ع + ح ح' + ء' ص) هـ + \text{الخ}$$

ولايجاد نهاية النسبة يفرض هـ = ٠ فيحدث

$$\frac{و \cdot ع ص}{و س} = ح ع + ح' ص$$

(ووضع النقطة فى و · ع ص يدل على انه يراد اخذ تفاضل ع ص) ثم نضع فى هذه المعادلة عوضا عن ح و ح' مقاديرها المبينة بمعادلتى (٧) فنجد

$$\frac{و \cdot ع ص}{و س} = \frac{ع و ص}{و س} + \frac{ص و ع}{و س}$$ وبحذف المقام المشترك

يوجد أن $و \cdot ع ص = ع و ص + ص و ع$

ويفهم من ذلك انه لايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين يلزم ضرب كل منهما فى تفاضل الآخر ثم تجمع الحواصل

* ١٥ * وبواسطة هذه الطريقة يوجد بالسهولة تفاضل حاصل ضرب ثلاثة متغيرات ولذلك يفرض ص ع ر مثلا ويوضع ع ر = ك ومن بعد الذى تقدم يوجد

$$\text{د} \cdot \text{صل} = \text{صد ل} + \text{ل د ص} \quad \cdots\cdots (٨)$$

وحيث كان ل = ع ر فبأخذ تفاضله حكم المقرر يكون

$$\text{د ل} = \text{ع د ر} + \text{ر د ع}$$

واذا وضعنا فى معادلة (٨) عوضا عن ل و د ل المقادير الاخيرة يوجد أن د · ص ع ر = ص ع د ر + ص ر د ع + ع ر د ص

ويشاهد حينئذ أن الطريقة المتقدمة تجرى ايضا على تفاضل حاصل ضرب ثلاث متغيرات يعنى انه لايجاد هذا التفاضل يكتب حاصل ضرب ص ع ر ويغير فيه كل متغير بتفاضله على التوالى وحاصل جمع الحواصل الحادثة يكون هو التفاضل المطلوب

* ١٦ * وهذه القاعدة عامة لايجاد تفاصل حاصل ضرب اى عدد كان من المتغيرات

* ١٧ * حيث ان تفاضل كمية حـ س هو حـ د س يعلم من ذلك انه متى توجد كمية ثابتة فى حاصل ضرب ينبغى ان يؤخذ تفاضل حاصل الضرب بصرف النظر عن المضروب الثابت ثم بعد أخذ التفاضل يضرب الناتج فى الكمية الثابتة ومن ثمة كان تفاضل كمية حـ س ص مثلا

$$\text{حـ س د ص} + \text{حـ ص د س}$$

* ١٨ * والكمية الثابتة ليس لها تفاضل لانه اذا فرض ص = حـ س + ب ثم اجريت عملية (بند ٧) ظهر أن د ص = حـ د س وهذا الناتج هو عين الناتج الذى ينتج اذا لم يكن للثابتة ب وجود

(فى تفاضل الكسر)

* ١٩ * تفاضل كسر $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ يساوى $\frac{\text{ص د س} - \text{س د ص}}{\text{ص}^{٢}}$

ولاثبات ذلك نفرض ان $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{ع}$ ثم نحذف المقام فيوجد س = ص ع وبموجب (بند ١٤) يكون د س = ص د ع + ع د ص ويستخرج من ذلك ص د ع = د س − ع د ص

واذا

واذا وضعنا فى الطرف الثانى عوضا عن ع مساويها $\frac{س}{ص}$ يوجد

$ص\, و ع = و س - \frac{س}{ص}\, و ص$ وباشتراك المقام يكون

$ص\, و ع = \frac{ص\, و س - س\, و ص}{ص}$ واخيرا $و ع = \frac{ص\, و س - س\, و ص}{ص^{٢}}$

أو $و \cdot \frac{س}{ص} = \frac{ص\, و س - س\, و ص}{ص^{٢}}$

(فى تفاضل المتغير ذى الأس)

* ٢٠ * حيث انه بقسمة جميع حدود معادلة

$و \cdot ص ع ر = ص ع\, و ر + ص ر\, و ع + ع ر\, و ص$ المبينة فى (بند ١٥)

على $ص ع ر$ يحدث $\frac{و \cdot ص ع ر}{ص ع ر} = \frac{و ر}{ر} + \frac{و ع}{ع} + \frac{و ص}{ص}$

وعلى العموم اذا فرضنا مضاريب متغيرة بعدة م ولتكن س ص ع ر ط الخ فتفاضل حاصل ضربها مقسوما على هذا الحاصل يكون

$$\frac{و \cdot س ص ع ر ط \cdots \text{الخ}}{س ص ع ر ط \cdots \text{الخ}} = \frac{و س}{س} + \frac{و ص}{ص} + \frac{و ر}{ر} + \text{الخ} \quad (٩)$$

واذا فرض ان س = ص = ع = ر = ط = الخ فمعادلة (٩) تصير

$$\frac{و \cdot س^{م}}{س^{م}} = \frac{و س}{س} + \frac{و س}{س} + \frac{و س}{س} + \frac{و س}{س} + \cdots \text{ بعدد } م$$

او $\frac{و \cdot س^{م}}{س^{م}} = \frac{م\, و س}{س}$ وبضرب كل من الطرفين فى $س^{م}$

يوجد ان $و س^{م} = \frac{م\, س^{م}\, و س}{س} = م\, س^{م-١}\, و س$

* ٢١ * يعلم من ذلك ان تفاضل المتغير ذى الأس يساوى اسه مضروبا فيه بأسه الاصلى الا واحدا والحاصل يضرب فى و س

(اثبات آخر)

حيث ان $س^{م} = س \times س \times س \times س \times س \cdots\cdots$ بعدد م

ومن بعد (بند ١٥) يوجد ان $و.س^{م} = س^{م-١} وس$
$+ س^{م-١} وس + س^{م-١} وس + \cdots$ بعدد م فيكون
$و.س^{م} = م س^{م-١} وس$.

* ٢٢ * وهذه القاعدة تصدق ايضا على المتغير الذى يكون اسه

كسرا اوسالبا وللبرهنة على ذلك نأخذ اولا $س^{\frac{م}{ن}}$ ونضع $ص = س^{\frac{م}{ن}}$ ثم

نرفع كلا من الطرفين الى ن فيحدث $ص^{ن} = س^{م}$ ونأخذ تفاضل

كل من الطرفين (بند ٢١) نجد $ن ص^{ن-١} وص = م س^{م-١} وس$

وينتج من ذلك $وص = \frac{م}{ن} \frac{س^{م-١}}{ص^{ن-١}} وس$

واذا وضعنا فى هذه المعادلة عوضا عن $س^{م-١}$ و $ص^{ن-١}$ كميتى $\frac{س^{م}}{س}$ و $\frac{ص^{ن}}{ص}$

يكون $وص = \frac{م}{ن} \frac{\frac{س^{م}}{س}}{\frac{ص^{ن}}{ص}} وس$ ومنه $وص = \frac{م}{ن} \frac{ص س^{م}}{س ص^{ن}} وس$

وحيث ان $س^{م} = ص^{ن}$ فتؤول المعادلة السابقة الى

$وص = \frac{م}{ن} \frac{ص}{س} وس$ وبوضع مقدار ص بدلا عنه يوجد

$وس^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} \frac{س^{\frac{م}{ن}}}{س} وس$ او $وس^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} \times س^{\frac{م}{ن}-١} وس$

وهذا ما أردنا اثباته ولاجل اثبات الحالة التى يكون فيها الأس سلبيا نفرض

$ص = س^{-م}$ وذلك يؤول الى $ص = \frac{١}{س^{م}}$ ثم نأخذ التفاضل بقاعدة

الكسور بناء على (بند ٢١) نجد

$$و ص = \frac{س^م و ١ - ١ و . س^م}{س^م س^م}$$

وبسبب كون تفاضل الكمية الثابتة صفراً تؤول هذه المعادلة الى

$و ص = - \frac{و . س^م}{س^{٢م}}$ ثم يعمل التفاضل المشار اليه بقاعدة (بند ٢١)

فيكون $و ص = - \frac{م س^{م-١}}{س^{٢م}} و س$ ولاجراء عمل القسمة يلزم ان

يطرح أس كمية س التى فى المقسوم عليه من اس كمية س التى

فى المقسوم فيوجد $و ص = - م س^{م-١-٢م} و س$ أو

$و ص = - م س^{-م-١} و س$ وهو موافق لقاعدة (بند ٢١)

وبه يتم المراد

(تفاضل المتغير المجذور)

* ٢٣ * لايجاد تفاضل متغير مجذور يحوّل هذا المتغير الى اس

كسرى وتجرى عليه قاعدة (بند ٢١) فلايجاد تفاضل كمية

$\sqrt{س}$ مثلا نحوّلها الى $س^{\frac{١}{٢}}$ وتفاضل هذه يكون

$$\frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}} و س = \frac{و س}{٢\sqrt{س}}$$

ويعلم من ذلك انه لايجاد تفاضل الجذر التربيعى لكمية متغيرة يلزم قسمة تفاضل

هذه الكمية على ضعف الجذر

(تنبيه) حيث انه بفرض م = ١ فى معادلة

$و . س^{\frac{م}{ن}} = \frac{م}{ن} س^{\frac{م}{ن}-١} و س$ المبينة فى (بند ٢٢) يوجد

$و . س^{\frac{١}{ن}} = \frac{١}{ن} س^{\frac{١}{ن}-١} و س$ وذلك عبارة عن

$$\text{و}\cdot\sqrt[\text{ن}]{\text{س}} = \frac{1}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{1-\text{ن}}{\text{ن}}}\,\text{وس} = \frac{\text{وس}}{\text{ن}\,\text{س}^{\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}}}} = \frac{\text{وس}}{\text{ن}\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{ن}-1}}}$$

يعلم من ذلك ان تفاضل المتغير المجذور الى درجة ما يساوى تفاضل المتغير مقسوما على درجة الجذر مضروبة فى الجذر بدرجته الاصلية لكن تكون الكمية الموضوعة تحت الجذر مرفوعة الى درجة الجذر ناقصة واحدا

* ٢٤ * قد تكون الدالة ص والمتغير س غير مبينين بمعادلة واحدة كما فى $\text{ص} = \text{د ع}$, $\text{ع} = \text{ء س}$ مثلا

والطريقة الاولى التى تتصور لايجاد المكرر التفاضلى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ تكون بحذف ع من بين هاتين المعادلتين حتى يمكن تطبيق قاعدة التفاضل واجراؤها عليها الا انه يمكن ايجاد المكرر التفاضلى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ من اول وهلة بدون احتياج الى هذه العملية الاولية ولنشرع فى ذلك فنقول نفرض انه بتغير س بكمية $\text{س} + \text{هـ}$ فى معادلة $\text{ع} = \text{ء س}$ تتغير ع بكمية $\text{ع} + \text{ك}$ ثم انه اذا وضعت $\text{ع} + \text{ك}$ محل ع فى معادلة $\text{ص} = \text{د ع}$ تصير دالة ص متغيرة بكمية $\text{ص}'$ ويكون اذن

$$\text{ع}' = \text{ء}\,(\text{س}+\text{هـ})\ ,\ \text{ص}' = \text{د}\,(\text{ع}+\text{ك})$$

ثم بعد ذلك يحل الطرفان الاخيران لهاتين المعادلتين ويفرض ان النواتج تكون مرتبة بحسب القوى التصاعدية فيتحصل من ذلك

$$\text{ع}' = \text{ع} + \text{ل هـ} + \text{ل}'\,\text{هـ}^2 + \text{ل}''\,\text{هـ}^3 + \cdots\cdots \text{الخ}$$
$$\text{ص}' = \text{ص} + \text{ل}_1\,\text{ك} + \text{ل}'_1\,\text{ك}^2 + \text{ل}''_1\,\text{ك}^3 + \cdots\cdots \text{الخ}$$

ويوجد من بعد تحويل كميتى ع , ص فى الاطراف الاول وقسمة النواتج على هـ , ك ان

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\text{عَ}-\text{ع}}{\text{هـ}}=\text{ل}+\text{لَ}\,\text{هـ}+\text{لً}\,\text{هـ}^{2}+\cdots\cdots\ \text{الخ}\\ \frac{\text{صَ}-\text{ص}}{\text{ك}}=\text{ل}_{1}+\text{لَ}_{1}\,\text{ك}+\text{لً}_{1}\,\text{ك}^{2}+\cdots\cdots\ \text{الخ}\end{array}\right\}\quad(١٠)$$

وبضرب هاتين المعادلتين فى بعضهما طرفا بطرف يحدث

$$\frac{\text{صَ}-\text{ص}}{\text{ك}}\times\frac{\text{عَ}-\text{ع}}{\text{هـ}}=(\text{ل}_{1}+\text{لَ}_{1}\,\text{ك}+\text{لً}_{1}\,\text{ك}^{2}+\text{الخ})(\text{ل}+\text{لَ}\,\text{هـ}+\text{لً}\,\text{هـ}^{2}+\text{الخ})$$

وحيث كان ك هو زيادة ع فيكون $\text{عَ}-\text{ع}=\text{ك}$

وينبنى على ذلك ان الطرف الاوّل للمعادلة الاخيرة يؤول الى

$\frac{\text{صَ}-\text{ص}}{\text{هـ}}$ وبوضع $\text{سَ}-\text{س}$ محل هـ تؤول المعادلة المذكورة الى

$$\frac{\text{صَ}-\text{ص}}{\text{سَ}-\text{س}}=(\text{ل}_{1}+\text{لَ}_{1}\,\text{ك}+\text{لً}_{1}\,\text{ك}^{2}+\text{الخ})\ (\text{ل}+\text{لَ}\,\text{هـ}+\text{لً}\,\text{هـ}^{2}+\text{الخ})\quad(١١)$$

وحين تنعدم هـ تنعدم ك ايضا لان ع انما ازدادت بقدر ك وصارت عَ لما ازدادت س كمية هـ وصارت $\text{س}+\text{هـ}$ فبناء على ذلك تؤول معادلة (١١) فى النهاية اعنى فى حالة فرض $\text{هـ}=٠$

الى $$\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}=\text{ل}_{1}\times\text{ل}\quad(١٢)$$

ولتعيين كميتى ل_{1} و ل ينبغى ان يفرض ان $\text{هـ}=٠$ و $\text{ك}=٠$ فى معادلتى (١٠) فيحدث من ذلك

$$\frac{\text{وا ع}}{\text{وا س}}=\text{ل}\ ،\ \frac{\text{وا ص}}{\text{وا ع}}=\text{ل}_{1}$$

فتوضع حينئذ هذه المقادير عوضا عن ل و ل_{1} فى معادلة (١٢)

فيوجد أن $$\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}=\frac{\text{وا ص}}{\text{وا ع}}\times\frac{\text{وا ع}}{\text{وا س}}\quad(١٣)$$

وهذا الناتج يبين انه لايجاد مكرر $\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}$ التفاضلى من بين معادلتين بهذه

الصورة

$ص = دع$ و $ع = ء س$

يكفى ان تستخرج المكررات $\frac{وا ص}{وا ع}$ و $\frac{وا ع}{وا س}$ التفاضلية من هاتين المعادلتين ثم تضرب النواتج فى بعضها وحاصل الضرب الحادث يكون هو مكرر $\frac{وا ص}{وا س}$ التفاضلى المطلوب

* ٢٥ * فاذا فرضنا مثلا ان $ص = ٣ ع^٢$ و $ع = س^٣ + ح س^٢$

فيحدث من ذلك $\frac{وا ص}{وا س} = ٦ ع$ و $\frac{وا ع}{وا س} = ٣ س^٢ + ٢ ح س$

وبضرب هذين المكررين فى بعضهما يكون

$$\frac{وا ص}{وا س} = ٦ ع (٣ س^٢ + ٢ ح س) = ٦ (س^٣ + ح س^٢)(٣ س^٢ + ٢ ح س)$$

* ٢٦ * قانون (١٣) يستعمل بكثرة فى أخذ تفاضل الكميات العسرة ولنمثل ببعض منها فنقول

نبحث عن ايجاد تفاضل $ص = \sqrt{ح^٢ - س^٢}$ فذلك يؤول الى ايجاد المكرر التفاضلى $\frac{وا ص}{وا س}$ ولذا نضع $ح^٢ - س^٢ = ع$ فيكون بناء عليه

$$ص = \sqrt{ع} = ع^{\frac{١}{٢}}$$

ومعادلتنا $ص = دع$ و $ع = ء س$ (بند ٢٤) تؤولان

حينئذ الى $ص = ع^{\frac{١}{٢}}$ و $ع = ح^٢ - س^٢$

فبأخذ تفاضل كل من طرفيهما (بند ٢١) يوجد

$$\frac{وا ص}{وا ع} = \frac{١}{٢} ع^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢} (ح^٢ - س^٢)^{-\frac{١}{٢}} \text{ و } \frac{وا ع}{وا س} = - ٢ س$$

وبضرب

وبضرب هذين المكررين التفاضليين فى بعضهما يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = -\text{س}\left(\text{ح}^{٢}-\text{س}^{٢}\right)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{-\text{س}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}-\text{س}^{٢}}}$$

واذن يكون

$$\text{وص} = \frac{-\text{س}\,\text{وس}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}-\text{س}^{٢}}} .$$

وليكن ايضا $\text{ص} = \left(\text{ح}+\text{ء}\text{س}^{\text{م}}\right)^{\text{ن}}$ فلاجل ايجاد التفاضل نجعل

$\text{ح} + \text{ء}\text{س}^{\text{م}} = \text{ع}$ فيحدث من ذلك معادلتا

$\text{ص} = \text{ع}^{\text{ن}}$ و $\text{ع} = \text{ح} + \text{ء}\text{س}^{\text{م}}$ واذن يكون

$$\frac{\text{وص}}{\text{وع}} = \text{ن}\,\text{ع}^{\text{ن}-١} = \text{ن}\left(\text{ح}+\text{ء}\text{س}^{\text{م}}\right)^{\text{ن}-١} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وع}}{\text{وس}} = \text{م}\,\text{ء}\,\text{س}^{\text{م}-١}$$

وبضرب هذين المكررين التفاضليين فى بعضهما يوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{م}\,\text{ن}\,\text{ء}\,\text{س}^{\text{م}-١}\left(\text{ح}+\text{ء}\text{س}^{\text{م}}\right)^{\text{ن}-١}$$

والتفاضل المطلوب يكون

$$\text{وص} = \text{م}\,\text{ن}\,\text{ء}\,\text{س}^{\text{م}-١}\left(\text{ح}+\text{ء}\text{س}^{\text{م}}\right)^{\text{ن}-١}\text{وس}$$

* ٢٧ * ولنمثل بمثال ثالث فنفرض $\text{ص} = \left(\text{ح}+\sqrt{\text{ء}-\frac{\text{هـ}}{\text{س}^{٢}}}\right)^{٤}$

ثم نضع $\text{ء} - \frac{\text{هـ}}{\text{س}^{٢}} = \text{ع}$ ..... (١٤) فيكون

$$\text{ص} = \left(\text{ح}+\sqrt{\text{ع}}\right)^{٤} \quad ..... (١٥)$$

وبأخذ تفاضل معادلة (١٤) يحدث $\text{وع} = \frac{٢\text{هـ}\,\text{س}\,\text{وس}}{\text{س}^{٤}}$ ومن

ذلك $\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = \frac{٢\text{هـ}}{\text{س}^{٣}}$ ويحدث ايضا من معادلة (١٥)

$$\text{وص} = ٤\left(\text{ح}+\sqrt{\text{ع}}\right)^{٣}\text{و}\left(\text{ح}+\sqrt{\text{ع}}\right) = ٤\left(\text{ح}+\sqrt{\text{ع}}\right)^{٣}\frac{\text{وع}}{٢\sqrt{\text{ع}}}$$

وباستبدال ع بمقدارها تؤول المعادلة الاخيرة الى

$$\frac{و\,ص}{و\,ع} = \frac{٢\left(ح + \sqrt{ء - \frac{هـ}{س^{٢}}}\right)^{٣}}{\sqrt{ء - \frac{هـ}{س^{٢}}}}$$ ثم يحدث بضرب هذين المكررين في بعضهما

$$\frac{و\,ص}{و\,س} = \frac{\frac{٤هـ}{س^{٣}}\left(ح + \sqrt{ء - \frac{هـ}{س^{٢}}}\right)^{٣}}{\sqrt{ء - \frac{هـ}{س^{٢}}}}$$

واذا اجريت العملية على هذا المثال $ص = (ح + \sqrt{س})^{٣}$

يوجد $\frac{و\,ص}{و\,س} = \frac{٣(ح + \sqrt{س})^{٢}}{٢\sqrt{س}}$.

* ٢٨ * ثبت الآن أن تفاضل حاصل جمع جملة دوال لمتغير واحد يساوي دائما حاصل جمع تفاضلات هذه الدوال ولو أن ما تقدم يجعل ذلك في غاية الايضاح ولذا نفرض $ص = ك\,س + د\,س + ء\,س$ ونغير في هذه الدوال متغير $س$ بكمية $س + هـ$ ونفرض انه يوجد

$$ص' = ك\,س + ح\,هـ + ح'\,هـ^{٢} + \cdots \text{الخ} + د\,س + و\,هـ + و'\,هـ^{٢}$$
$$+ \cdots \text{الخ} + ء\,س + ر\,هـ + ر'\,هـ^{٢} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

و بطرح المعادلة المفروضة من هذه المعادلة طرفا بطرف يحدث

$$ص' - ص = (ح + و + ر)هـ + (ح' + و' + ر')هـ^{٢} + \cdots \text{الخ}$$

وبالارتقاء الى النهاية نجد أن $\frac{و\,ص}{و\,س} = ح + و + ر$

و $و\,ص = ح\,و\,س + و\,و\,س + ر\,و\,س$

وحيث كانت كميات $ح$ و $و$ و $ر$ هي الحدود المضروبة في القوة الاولى الى $هـ$ في حلول $ك(س + هـ)$ و $د(س + هـ)$ و $ء(س + هـ)$ ينتج من ذلك أن $ح\,و\,س$ و $و\,و\,س$ و $ر\,و\,س$ تبين حاصل جمع تفاضلات الدوال المفروضة وهذا ما اردنا اثباته

* ٢٩ * ولنختم ما سبق بالتنبيه الآتي وذلك ان تفاضلات الدوال التي لا تخالف بعضها الا في كميات ثابتة كلها متحدة وهذه القضية بينة واضحة

لاننا

لاننا اثبتنا فيما مرّ أنّ الكميات الثابتة ليس لها تفاضل ولذا تتحد كميتا
م س + ﻫ س٢ + ح٣ و م س + ﻫ س٢ + ح ى ـ ﻫ و
فى التفاضل اذ تفاضل كل منهما م وس + ٢ ﻫ س وس

(فى التفاضلات المتوالية)

* ٣٠ * التفاضلات المتوالية لدالة مفروضة هى عبارة عن تفاضل هذه الدالة وتفاضل المكرّر التفاضلى لها وتفاضل المكرّر التفاضلى الاخير وهكذا حتى ينتهى الى مكرّر ثابت يعنى انه اذا فرض ان ص تكون دالة لمتغير س مثلا ثم اخذ تفاضل هذه الدالة وكان هذا التفاضل ع وس ثم اخذ تفاضل كمية ع اذا اشتملت على متغير س وكان هذا التفاضل عَ وس واخذ ايضا تفاضل كمية عَ اذا فرض انها تشتمل على متغير س وكان التفاضل الحادث عً وس واستمر هكذا الى أن يصير المكرّر التفاضلى غير محتو على متغير س فكميات ع وس و عَ وس و عً وس الخ هى التى تسمى التفاضلات المتوالية لدالة ص والاول منها يسمى التفاضل الاول والثانى يسمى التفاضل الثانى وهكذا الخ

فاذا فرض أنّ ص = ح س٣ مثلا حدث

و ص = ٣ ح س٢ وس

وهذا هو التفاضل الاول لكمية ص

واذا وضع ع = ٣ ح س٢ واخذ التفاضل وجد

و ع = ٦ ح س وس وهذا هو التفاضل الثانى

واذا وضع ايضا عَ = ٦ ح س واخذ التفاضل فيوجد ان

و عَ = ٦ ح وس وهذا هو التفاضل الثالث

وقد انتهت التفاضلات المتوالية فى هذا المثال الى هنا لان تفاضل كمية ٦ ح الثابتة صفر

والمكرّرات التفاضلية التى هى ع و عَ و عً .... الخ للتفاضلات المتوالية تسمى المكرّرات التفاضلية المتوالية وليتنبه انه يمكن

حدوث هذه المكررات باخذ التفاضلات المتوالية لكمية وصـ باعتبار كمية وسـ فيها ثابتة وبيان ذلك ان نقول حيث ان وصـ = ح وسـ وبأخذ تفاضل كل من الطرفين باعتبار وسـ ثابت يوجد

و٢صـ = و٠ح × وسـ وكان وح = حَ وسـ فيوجد

و٢صـ = حَ وسـ × وسـ = حَ وسـ٢ ومنه يستخرج

$\frac{\text{و}^{2}\text{صـ}}{\text{وسـ}^{2}}$ = حَ وكذا بأخذ تفاضل طرفى معادلة و٢صـ = حَ × وسـ٢

باعتبار وسـ ثابتة يوجد و٣صـ = وحَ × وسـ٢ وبسبب مساواة كمية وحَ الى حً وسـ يكون

و٣صـ = حً وسـ × وسـ٢ = حً وسـ٣ ومنه يحدث

$\frac{\text{و}^{3}\text{صـ}}{\text{وسـ}^{3}}$ = حً وهلم جرا

(تنبيه) رموز و٢صـ و و٣صـ الخ تدل على التفاضل الثانى والثالث الخ لكمية صـ وذلك عبارة عن تفاضل التفاضل وتفاضل تفاضل التفاضل الخ

واما وسـ٢ و وسـ٣ ...... الخ فتدل على تربيع او تكعيب الخ كمية وسـ

(فى نظرية مكلوران)

* ٣١ * لتكن صـ دالة لمتغير سـ فاذا رتبنا هذه الدالة بالنسبة للقوى التصاعدية لهذا المتغير وكان الناتج

صـ = ح + دسـ + وسـ٢ + رسـ٣ + ح سـ٤ + الخ (١٦)

ثم أخذنا التفاضلات المتوالية لهذه الدالة وجدنا بعد القسمة على وسـ

$\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ = د + ٢وسـ + ٣رسـ٢ + ٤ح سـ٣ + .. الخ

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = ٢\text{و} + ٢ \times ٣\,\text{ر}\,\text{س} + ٣ \times ٤\,\text{ح}\,\text{س}^{٢} + \cdots \text{الخ}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}} = ٢ \times ٣\,\text{ر} + ٢ \times ٣ \times ٤\,\text{ح}\,\text{س} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

واذا رمزنا برمز (ص) لما تؤول اليه ص حين يفرض فيها $\text{س} = ٠$

وبرمز $\left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right)$ لما تؤول اليه كمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ حين يفرض فيها

$\text{س} = ٠$ وبرمز $\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\right)$ لما تؤول اليه كمية $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ حين يفرض

فيها $\text{س} = ٠$ وهكذا

فالمعادلات السابقة تؤول الى $(\text{ص}) = \text{ح}$ و $\left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right) = \text{ء}$

و $\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\right) = ٢\text{و}$ و $\left(\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\right) = ٢ \times ٣\,\text{ر}$

ومنها يستخرج

$$\text{ح} = (\text{ص}) \quad \text{و} \quad \text{ء} = \left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right) \quad \text{و} \quad \text{و} = \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\right)$$

$$\text{و} \quad \text{ر} = \frac{١}{٢ \times ٣}\left(\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\right)$$

واذا وضعنا هذه المقادير فى معادلة (١٦) فتؤول الى

$$\text{ص} = (\text{ص}) + \left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right)\text{س} + \frac{١}{٢}\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\right)\text{س}^{٢}$$

$$+ \frac{١}{٢ \times ٣}\left(\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\right)\text{س}^{٣} + \text{الخ} \cdots\cdots\cdots \quad (١٧)$$

وهذا هو قانون مكلوران ودستوره

(المثال الاول)

* ٣٢ * لحل كمية $\frac{١}{ح+س}$ بواسطة قانون مكلوران نضع

ص = $\frac{١}{ح+س}$ فنجد بأخذ تفاضل الطرفين

$$وص = \frac{(ح+س)و١ - ١\times و(ح+س)}{(ح+س)^{٢}} = -\frac{وس}{(ح+س)^{٢}}$$

وبقسمة الطرفين على وس يوجد

$$\frac{وص}{وس} = -\frac{١}{(ح+س)^{٢}}$$

وبأخذ التفاضل ثانيا وثالثا الخ يحدث من بعد القسمة على وس

$$\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = \frac{٢(ح+س)}{(ح+س)^{٤}} = \frac{٢}{(ح+س)^{٣}}$$

$$و\ \frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}} = -\frac{٢\times٣(ح+س)^{٢}}{(ح+س)^{٦}} = -\frac{٢\times٣}{(ح+س)^{٤}}$$

ثم نفرض س = ٠ فى مقادير ص و $\frac{وص}{وس}$ و $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ الخ

فيحدث $(ص) = \frac{١}{ح}$ و $\left(\frac{وص}{وس}\right) = -\frac{١}{ح^{٢}}$ و $\left(\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\right) = \frac{٢}{ح^{٣}}$

و $\left(\frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}}\right) = -\frac{٢\times٣}{ح^{٤}}$ الخ

ثم نضع هذه المقادير ومقدار ص الحادث بفرض س = ٠ ايضا فى قانون (١٧) فيحدث لنا

$$\frac{١}{ح+س} = \frac{١}{ح} - \frac{س}{ح^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ح^{٣}} - \frac{س^{٣}}{ح^{٤}} + \text{الخ}$$

(المثال الثانى)

* ٣٣ * ص = $\sqrt{ح^{٢}+ءس}$ فنضع ص = $(ح^{٢}+ءس)^{\frac{١}{٢}}$ ونجد

و

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{١}{٢}\left(\text{ح}^{٢}+\text{دس}\right)^{-\frac{١}{٢}}\text{د} = \frac{١}{٢}\,\frac{\text{د}}{\sqrt{\text{ح}^{٢}+\text{دس}}}$$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = -\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\left(\text{ح}^{٢}+\text{دس}\right)^{-\frac{٣}{٢}}\text{د}^{٢} = -\frac{\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\,\text{د}^{٢}}{\sqrt{\left(\text{ح}^{٢}+\text{دس}\right)^{٣}}}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}} = \frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٢}\left(\text{ح}^{٢}\times\text{دس}\right)^{-\frac{٥}{٢}}\text{د}^{٣} = \frac{\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٢}\,\text{د}^{٣}}{\sqrt{\left(\text{ح}^{٢}+\text{دس}\right)^{٥}}}$$

واذا فرضنا ان $\text{س} = ٠$ تؤول هذه المقادير الى $\text{ص} = \left(\text{ح}^{٢}\right)^{\frac{١}{٢}} = \text{ح}$

و $\left(\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\right) = \frac{١}{٢}\,\frac{\text{د}}{\text{ح}}$ و $\left(\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\right) = -\frac{\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\,\text{د}^{٢}}{\text{ح}^{٣}}$

$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}} = \frac{\frac{١}{٢}\times\frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٢}\,\text{د}^{٣}}{\text{ح}^{٥}}$ وبوضعها في قانون (١٧) يؤول هذا القانون الى

$$\sqrt{\text{ح}^{٢}+\text{دس}} = \text{ح} + \frac{\text{دس}}{٢\text{ح}} - \frac{\text{د}^{٢}\text{س}^{٢}}{٨\text{ح}^{٣}} + \frac{\text{د}^{٣}\text{س}^{٣}}{١٦\text{ح}^{٥}} - \text{الخ}$$

(المثال الثالث)

* ٣٤ * ولنأخذ $\text{ص} = \left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}}$ مثالا ثالثا فنجد باجراء التفاضل

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{م}\left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}-١}$$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = \text{م}\left(\text{م}-١\right)\left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}-٢}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}} = \text{م}\left(\text{م}-١\right)\left(\text{م}-٢\right)\left(\text{ح}+\text{س}\right)^{\text{م}-٣}$$

ونجعل $س = ٠$ يؤول مقدار ص الى $ح^م$ يعنى انه يوجد $(ص) = ح^م$

وتؤول المكررات التفاضلية $\frac{وص}{وس}$ و $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ الخ الى

$$\left(\frac{وص}{وس}\right) = م\,ح^{م-١} \text{ و } \left(\frac{و^٢ص}{وس^٢}\right) = م(م-١)\,ح^{م-٢}$$

و $\left(\frac{و^٣ص}{وس^٣}\right) = م(م-١)(م-٢)\,ح^{م-٣}$ ونوضع هذه المقادير فى

قانون (١٧) فيوجد

$$(ح+س)^م = ح^م + م\,ح^{م-١}\,س + م\,\frac{(م-١)}{٢}\,ح^{م-٢}\,س^٢$$

$$+ م\,\frac{(م-١)}{٢}\,\frac{(م-٢)}{٣}\,ح^{م-٣}\,س^٣ + \text{الخ}$$

(فى تفاضل الكميات العالية)

* ٣٥ * الكمية العالية هى التى تكون متبوعة باس متغير اوبلوغاريتم اوبجيب اوبجيب تمام وما اشبه ذلك

* ٣٦ * ولنفرض اوّلا ان المراد ايجاد تفاضل هذه الكمية $ح^س$

ولذلك نضع $ص = ح^س$ ثم نغير كمية $س$ بكمية $س + هـ$ فتتغير كمية $ص$ بكمية $صَ$ وتؤول هذه المعادلة الى

$$صَ = ح^{س+هـ} \text{ أو } صَ = ح^س \times ح^هـ$$

ثم نحل كمية $ح^هـ$ بالنسبة لقوى $هـ$ ولايتيسر ذلك بقانون الكمية ذات الحدين الا بجعل $ح = ١ + ى$ ومن ثم يكون

$$ح^هـ = (١+ى)^هـ = ١ + \frac{ى}{١}\,هـ + هـ\,(هـ-١)\,\frac{ى^٢}{١\times٢}$$

$$+ هـ(هـ-١)(هـ-٢)\,\frac{ى^٣}{١\times٢\times٣} + \text{الخ} \cdots (١٨)$$

وترتب

وترتب هذه بالنسبة الى هـ لكن بدون اجراء العملية لاننا لم نحتج الا للحدود المضروبة فى اول قوى هـ وبالتأمل يظهر انه اذا فرض حاصل بهذه الصورة هـ (هـ ــ ١) (هـ ــ ٢) (هـ ــ ٣) الخ بحيث يكون احد جزئيه (هـ ــ ١) (هـ ــ ٢) (هـ ــ ٣) الخ يتركب من مضاريب عدتها ن فحل هذا الجزء من بعد نظر المعادلات يكون هكذا

$$هـ^{ن} + ا هـ^{ن-١} + ب هـ^{ن-٢} + \cdots + م هـ + ن_{١}$$

وحد $ن_{١}$ يكون مركبا من حاصل ضرب الاجزاء الثانية ــ١ و ــ٢ و ــ٣ الخ لذوات الحدين هـ ــ ١ و هـ ــ ٢ و هـ ــ ٣ الخ ويكون لا محالة

$$هـ(هـ-١)(هـ-٢)(هـ-٣) الخ = هـ(هـ^{ن} + ا هـ^{ن-١} \cdots + م هـ + ن_{١})$$

ومن البين ان الحد المشتمل على هـ بدرجة اولى فى هذا الحاصل هو $ن_{١}$ هـ او (ــ ١ × ــ ٢ × ــ ٣ و الخ) هـ حكم ما تقرر ويؤخذ منه انه لايجاد الحدود المتبوعة بأول قوى هـ فى الحدود الصعبة فى حل (١٨) وهى من الحد الثالث فصاعدا تشكل مكررات هـ المختلفة بالوجه الآتى وهو أن مكرر هـ يتركب من حاصل ضرب الاعداد المجردة عن هـ فى $\frac{ى^{٢}}{١ \times ٢}$ للحد الثالث وفى $\frac{ى^{٣}}{٢ \times ٣}$ للحد الرابع وهلم جرا وينبنى على ذلك ان $ح^{هـ} = ١ + (ى - \frac{ى^{٢}}{٢} + \frac{ى^{٣}}{٣} - الخ)$ هـ + الحدود المحتوية على $هـ^{٢}$ و $هـ^{٣}$ الخ

واذا رمزنا بحرف ع لكمية $(ى - \frac{ى^{٢}}{٢} + \frac{ى^{٣}}{٣} - \frac{ى^{٤}}{٤} + الخ)$ يحدث لنا

$$ح^{هـ} = ١ + ع هـ + الحدود المحتوية على هـ^{٢} و هـ^{٣} و هـ^{٤} الخ$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة $ص^{َ} = ح^{س هـ}$ آلت هذه المعادلة

الى $\text{صَ} = \text{ح}^{\text{س}} + \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}\,\text{هـ} +$ الحدود المحتوية على $\text{هـ}^{٢}$ وعلى $\text{هـ}^{٣}$ وعلى $\text{هـ}^{٤}$ الخ

واذا طرحنا المعادلة الاولية التى هى $\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$ من هذه المعادلة يبقى

$\text{صَ} - \text{ص} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}\,\text{هـ} +$ الحدود المحتوية على $\text{هـ}^{٢}$ و $\text{هـ}^{٣}$ .. الخ

وبالارتقاء الى النهاية يوجد $\dfrac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}$ وبوضع مقدار ص

عوضا عنها يوجد $\dfrac{\text{و}.\text{ح}^{\text{س}}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}$ .... (١٩)

كمية ع الثابتة تتعلق بكمية ح لانه اذا وضعنا عوضا عن د
مقدارها الذى هو ح ـ ١ فى معادلة

$$\text{ع} = \left(\text{د} - \frac{\text{د}^{٢}}{٢} + \frac{\text{د}^{٣}}{٣} - \frac{\text{د}^{٤}}{٤} + \cdots \text{الخ}\right) \quad \text{حدث}$$

$$\text{ع} = (\text{ح}-١) - \frac{(\text{ح}-١)^{٢}}{٢} + \frac{(\text{ح}-١)^{٣}}{٣} - \frac{(\text{ح}-١)^{٤}}{٤} + \text{الخ}\cdots \quad (٢٠)$$

* ٣٧ * ولنشرع فى كيفية ايجاد مقدار اخر سهل لكمية ع

الثابتة ولذلك نبحث عن حل كمية $\text{ح}^{\text{س}}$ بواسطة قضية مكلوران فيكون

$$\text{ص} = \text{ح}^{\text{س}}$$

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}$$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = \frac{\text{ع و}.\text{ح}^{\text{س}}}{\text{وس}} = \text{ع}\,\frac{\text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}\,\text{وس}}{\text{وس}} = \text{ع}^{٢}\,\text{ح}^{\text{س}}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}} \cdots\cdots\cdots\cdots = \text{ع}^{٣}\,\text{ح}^{\text{س}}\ \text{الخ}$$

وبجعل

وبجعل $س = ٠$ يوجد

$(ص) = ح = ١$

$\left(\frac{و ص}{و س}\right) = ع$

$\left(\frac{و^٢ ص}{و س^٢}\right) = ع^٢$

$\left(\frac{و^٣ ص}{و س^٣}\right) = ع^٣$ ..... الخ

وبوضع هذه المقادير فى قانون (١٧) يوجد

$$ح^{س} = ١ + \frac{ع س}{١} + \frac{ع^٢ س^٢}{١ \times ٢} + \frac{ع^٣ س^٣}{١ \times ٢ \times ٣} + \text{.....الخ}$$

وحيث انه بأخذ متغير $س$ اى مقدار كان لايتغير مقدار $ع$ الثابت فيمكننا ان نضع $س = \frac{١}{ع}$ وتؤول المعادلة الاخيرة حينئذ الى

$$ح^{\frac{١}{ع}} = ١ + \frac{١}{١} + \frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{١ \times ٢ \times ٣} + \text{.........الخ}$$

ثم نرمز للطرف الثانى من هذه المعادلة برمز $هَ$ فتؤول الى

$ح^{\frac{١}{ع}} = هَ$ ويستخرج من ذلك $ح = هَ^{ع}$ وباخذ لوغاريتم كل من الطرفين يوجد

لوغا $ح =$ لوغا $هَ^{ع} = ع$ لوغا $هَ$ ومنه يحدث

$$ع = \frac{\text{لوغا } ح}{\text{لوغا } هَ} \quad \text{.........} (٢١)$$

وعدد $هَ$ المعلوم مقداره بمعادلة $هَ = ١ + ١ + \frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{١ \times ٢ \times ٣} +$ الخ هو الذى اتخذه نبير اساسا لحساب جداول لوغاريتماته المسماة باللوغاريتمات الطبيعية او الزائدية وقد يكتفى بالعشرة حدود الاول من

متسلسلة ١ + ١ + $\frac{١}{١\times٢}$ + $\frac{١}{١\times٢\times٣}$ + ... الخ

و يوجد حينئذ هَ = ٢٫٧١٨٢٨١٨ تقريبا واذا رمزنا برمز

لوح

لوح للوغاريتم ح فى الجملة الطبيعية او الزائدة نجد ح = (٢٫٧١٨٢٨١٨)

لوح * لوح

واختصارا ح = هَ واذن لوغا ح = لوغا هَ ولوغا ح = لوح لوغا هَ

ويستخرج من ذلك $\frac{\text{لوغا ح}}{\text{لوغا هَ}}$ = لوح وبهذا تؤول معادلة (٢١) الى

ع = لوح ومن ثم يستخرج من معادلة (١٩)

وَ$\text{ح}^{\text{س}}$ = $\text{ح}^{\text{س}}$ وَس . لوح ...... (٢٢)

(فى التفاضلات اللوغاريتمية)

* ٣٨ * لتكن س لوغاريتم لكمية ص فى الجملة التى اساسها

ح فيوجد ص = $\text{ح}^{\text{س}}$ وبأخذ تفاضل الطرفين (بند ٣٦) يحدث

وَص = ع $\text{ح}^{\text{س}}$ وَس ومنه يستخرج

وَس = $\frac{\text{وَص}}{\text{ع}\,\text{ح}^{\text{س}}}$ = $\frac{\text{وَص}}{\frac{\text{لوغا ح}}{\text{لوغا هَ}}\times\text{ح}^{\text{س}}}$ وبضرب كميتى الكسر الكلى فى

لوغا هَ يوجد

وَس = $\frac{\text{وَص}}{\text{ح}^{\text{س}}}$ $\frac{\text{لوغا هَ}}{\text{لوغا ح}}$ وبما ان $\text{ح}^{\text{س}}$ = ص وكانت س = لوغا ص

تؤول المعادلة السابقة الى وَ . لوغا ص = $\frac{\text{وَص}}{\text{ص}}$ $\frac{\text{لوغا هَ}}{\text{لوغا ح}}$

وفى الحالة التى تؤخذ فيها اللوغاريتمات من جملة نيبير يكون ح = هَ

ويوجد $\frac{\text{لوغا هَ}}{\text{لوغا ح}}$ = $\frac{\text{لوغا هَ}}{\text{لوغا هَ}}$ = ١ واذن يكون وَ . لوغا ص = $\frac{\text{وَص}}{\text{ص}}$

هذا

هذا بالنسبة للوغاريتم الطبيعى اى الذى اساسه هـ
اما اذا كان هذا الاساس حيثما اتفق بأن كان ح مثلا فانه يوجد

لوغا ح = ١ فقط ويكون و لو ص = $\frac{\text{وص}}{\text{ص}}$ لوغا هـ

فى تفاضل الجيوب وجيوب التمام وكذا باقى الخطوط المساحية اوفى تفاضل الدوال القوسية

* ٣٩ * القوس اكبر من جيبه واصغر من ظله ابدا ولاثبات ذلك نفرض قوس اب (شكل ٢) فجيب هذا القوس يكون بو وظله يكون دا ثم نأخذ قوس اب َ مساويا اب فخط ب بَ يكون خطا مستقيما فهو أصغر من خط ب ا بَ واذن يكون نصف هذا المستقيم وهو الجيب بو أصغر من نصف هذا المنحنى وهو ب ا اعنى قوس الجيب واما اثبات كون الظل اكبر من قوسه فهوان تقول حيث ان مثلث د دَ ع اكبر من قطاع ب ا بَ ع يوجد د دَ × ½ ا ع > قوس ب ا بَ × ½ ا ع وباسقاط ½ ا ع من الطرفين يبقى د دَ > قوس ب ا بَ وبتنصيف الطرفين يوجد دا > قوس ب ا وهذا ما أردنا اثباته

* ٤٠ * وينتج مما سبق ان نهاية نسبة الجيب الى قوسه واحد لأنه متى يكون قوس اب صفرا ينطبق الجيب على الظل فينطبق الجيب على القوس من باب اولى ويعلم من ذلك انه يوجد فى النهاية

$\frac{\text{حا اب}}{\text{قوس اب}}$ = ١ وبالرمز بحرف هـ لقوس اب يكون

$\frac{\text{حاهـ}}{\text{هـ}}$ = ١

* ٤١ * ولايجاد تفاضل الجيب الذى قوسه س نفرض ان هذا القوس يزداد بزيادة قدرها هـ فيحدث بواسطة حساب المثلثات

جا (س + هـ) = جاس جتاهـ + جاهـ جتاس ... (٢٣)

وبطرح جاس يعنى حالة الجيب الاولى من كل من طرفى هذه المعادلة

ثم بالقسمة على الزيادة هـ للمتغير يوجد

$$\frac{\text{جا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{جاس}}{\text{هـ}}=\frac{\text{جاس جتاهـ}+\text{جاهـ جتاس}-\text{جاس}}{\text{هـ}}$$

وبأخذ جاس مضروبا مشتركا فى الطرف الثانى للمعادلة الاخيرة يوجد

$$\frac{\text{جا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{جاس}}{\text{هـ}}=\frac{\text{جاس}(\text{جتاهـ}-1)}{\text{هـ}}+\frac{\text{جاهـ جتاس}}{\text{هـ}}\quad(٢٤)$$

ومتى تصير هـ صفرا ينعدم جتاهـ − ١ ويؤول $\frac{\text{جتاهـ}-1}{\text{هـ}}$

الى $\frac{0}{0}$ والاصلح حينئذ أن يوضع هذا الحد بصورة اخرى ولذلك يستخرج

من معادلة $\text{جتا}^2\text{هـ}+\text{جا}^2\text{هـ}=1$

$$\text{جتا}^2\text{هـ}-1=-\text{جا}^2\text{هـ}\ \text{أو}\ (\text{جتاهـ}-1)(\text{جتاهـ}+1)=-\text{جا}^2\text{هـ}$$

ومنه يستخرج $\text{جتاهـ}-1=-\frac{\text{جا}^2\text{هـ}}{\text{جتاهـ}+1}$

فنضع هذا المقدار فى معادلة (٢٤) فتؤول تلك المعادلة الى

$$\frac{\text{جا}(\text{س}+\text{هـ})-\text{جاس}}{\text{هـ}}=-\text{جاس}\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}+1}\cdot\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}+\text{جتاس}\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}\quad(٢٥)$$

وحين يفرض $\text{هـ}=0$ يوجد $\frac{\text{جاهـ}}{\text{هـ}}=1$ و $\frac{\text{جاهـ}}{\text{جتاهـ}+1}=\frac{0}{2}=0$

ومعادلة (٢٥) تؤول بهذا السبب الى $\frac{\text{د}\cdot\text{جاس}}{\text{دس}}=\text{جتاس}$

ويستخرج منه $\text{د}\cdot\text{جاس}=\text{جتاس دس}$ وهو المطلوب

* ٤٢ * هذا اذا كان نصف قطر الجدول مساويا لواحد فاذا لم يكن كذلك بان كان نق مثلا فنستعمل عوضا عن معادلة (٢٣) هذه المعادلة

$$\text{جا}(\text{س}+\text{هـ})=\frac{\text{جاس جتاهـ}+\text{جتاس جاهـ}}{\text{نق}}$$

ومن ثم يلزم ابقاء ثابتة نق فى الناتج السابق ويوجد

$\text{د}\cdot\text{جاس}=\frac{\text{دس جتاس}}{\text{نق}}$ لتفاضل جيب القوس الذى نصف قطره نق

* ٤٣ * ويمكن ايجاد تفاضل جاس بواسطة الاعتبارات الهندسية لانه اذا رمزنا بحرف س لقوس اـ (شكل ٣) وبحرف هـ لقوس ـم كان عمود ـح هو جاس وعمود مك هو

جا

جا (س + هـ) هذا وكلما قل قوس هـ كبرت زاوية م ـ حـ الى ان تصير قائمة حين يصير قوس هـ صفرا ويعلم من ذلك انه يمكن اعتبار زاوية م ـ حـ قائمة فى حالة النهاية و يصير مثلث م ـ ء حينئذ مشابها لمثلث ـ ح ع لان اضلاع هذه المثلثات تكون اعمدة على بعضها فى هذه الحالة وتحدث اذن هذه المتناسبة ـ حـ : ح ع :: ـ م : م ء أو نق : جتاس :: م ـ : جا (س + هـ) ـ جاس ومنها يستخرج

$$\frac{\text{جا}(س + هـ) - \text{جا}س}{م ـ} = \frac{\text{جتا}س}{\text{نق}}$$

وفى والنهاية يمكن تغيير وتر م ـ بقوسه الذى هو م ـ = هـ فاذا اعتبرنا ذلك فتؤول المعادلة السابقة الى

$$\frac{ى \cdot \text{جا}س}{ى س} = \frac{\text{جتا}س}{\text{نق}}$$ او .

$$ى \cdot \text{جا}س = \frac{\text{جتا}س \, ى س}{\text{نق}}$$ وباعتبار نصف القطر واحدا يكون

$$ى \cdot \text{جا}س = \text{جتا}س \, ى س$$

* ٤٤ * ولايجاد تفاضل جيب التمام جتاس نأخذ تفاضل معادلة $\text{جا}^{٢}س + \text{جتا}^{٢}س = ١$ أو وهو الاولى $(\text{جا}س)^{٢} + (\text{جتا}س)^{٢} = ١$ (بند ٢١) فيوجد

$٢ \, \text{جا}س \, ى \cdot \text{جا}س + ٢ \, \text{جتا}س \, ى \cdot \text{جتا}س = ٠$ ويستخرج من ذلك $ى \cdot \text{جتا}س = -\frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س} \, ى \cdot \text{جا}س$ ثم نضع فى هذه بدلا عن $ى \cdot \text{جا}س$ مقداره $ى س \, \text{جتا}س$ المبين فى (بند ٤١) ونختصر فيوجد $ى \cdot \text{جتا}س = - \text{جا}س \, ى س$ وهو المطلوب

* ٤٥ * ولايجاد تفاضل الظل نعتبر معادلة $\text{ظا}س = \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}$ ثم نأخذ تفاضلها (بند ١٩) فنجد

$$ى \cdot \text{ظا}س = \frac{\text{جتا}س \times ى \cdot \text{جا}س - \text{جا}س \times ى \cdot \text{جتا}س}{\text{جتا}^{٢}س}$$

ونضع عوضا عن و·جاس و و·جتاس مقادير جتاس وس و — جاس وس فيحدث من ذلك

$$\text{و·ظاس} = \frac{(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س})\,\text{وس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

واذن يكون $\text{و·ظاس} = \frac{\text{وس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$ لأن $\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س} = ١$

* ٤٦ * يعرف من حساب المثلثات ان نصف القطر وسط متناسب بين الظل وظل التمام وبين جيب التمام والقاطع ومن ثمة كان $\text{ظتاس} = \frac{١}{\text{ظاس}}$ و $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$ فاذا اخذ تفاضل الاولى (بند ١٩) حدث

$$\text{و·ظتاس} = -\frac{\text{و·ظاس}}{\text{ظا}^2\text{س}} = -\frac{\text{وس}}{\text{جتا}^2\text{س}\,\text{ظا}^2\text{س}} = -\frac{\text{وس}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

لانه يستخرج من معادلة $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}} = \text{ظا}$ أن $\text{جتا}\,\text{ظا} = \text{جا}$

* ٤٧ * واذا اخذ تفاضل المعادلة الثانية التي هي $\text{قاس} = \frac{١}{\text{جتاس}}$

$$\text{حدث و·قاس} = -\frac{\text{و·جتاس}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{\text{جاس وس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\;\frac{١}{\text{جتاس}}\;\text{وس} = \text{ظاس قاس وس}$$

* ٤٨ * ولايجاد تفاضل قاطع التمام نأخذ تفاضل معادلة

$\text{قتاس} = \frac{١}{\text{جاس}}$ فيوجد

$$\text{و·قتاس} = -\frac{\text{جتاس وس}}{\text{جا}^2\text{س}} = -\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\;\frac{١}{\text{جاس}}\;\text{وس}$$

$$= -\,\text{ظتاس قتاس وس}$$

* ٤٩ * واما لايجاد تفاضل الجيب المنكوس وهو جزء نصف القطر المحصور بين موقع الجيب والقوس فيكفي ان يؤخذ تفاضل هذه المعادلة

جا منكوس س + جتا س = ١ فيحدث من ذلك

و· جا منكوس س + و· جتا س = ٠ أو

و· جا منكوس س − جا س و س = ٠ أو

و· جا منكوس س = جا س و س

(فى تفاضل بعض دوال عالية عسرة)

* ٥٠ * القواعد السابقة تكفى لمعرفة تفاضل اى دالة متبوعة بكمية عالية لانه اذا فرضنا مثلا أن ص = $\text{ح}^{\text{ء}^{\text{س}}}$ ووضعنا $\text{ء}^{\text{س}}$ = ع وجدنا ص = $\text{ح}^{\text{ع}}$ وبأخذ التفاضل (ببند ٣٧) يكون

$$\text{وص} = \text{ح}^{\text{ع}}\ \text{لوح}\ \text{وع}$$ او

$$\frac{\text{وص}}{\text{وع}} = \text{ح}^{\text{ع}}\ \text{لوح} = \text{ح}^{\text{ء}^{\text{س}}}\ \text{لوح}\ .$$

وكذا يوجد بأخذ تفاضيل طرفى معادلة $\text{ء}^{\text{س}}$ = ع ان

$$\text{وع} = \text{ء}^{\text{س}}\ \text{لوء}\ \text{وس}$$ أو

$$\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = \text{ء}^{\text{س}}\ \text{لوء}$$ واذن يكون (ببند ٤٢)

$$\frac{\text{وص}}{\text{وع}} \times \frac{\text{وع}}{\text{وس}}\ \text{او}\ \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ح}^{\text{ء}^{\text{س}}}\ \text{ء}^{\text{س}}\ \text{لوح}\ \text{لوء}$$

* ٥١ * ليكن ايضا ص = $\text{ع}^{\text{ر}}$ (ع و ر كميات متغيرة) فنأخذ لوغاريتم كل من الطرفين فيحدث

لوغا ص = ر لوغا ع ثم نأخذ التفاضل فيحدث

و· لوغا ص = ر و· لوغا ع + لوغا ع و ر

ونضع عوضا عن التفاضلات اللوغاريتمية مقاديرها (بند ٢٨) فيكون

$$\frac{\text{وص}}{\text{ص}} = \text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}$$

وبناء على ذلك يكون

$$\text{وص} = \text{ص}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}\right) = \text{ع}^{\text{ر}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}\right)$$

وبواسطة هذا التفاضل يوجد بالسهولة تفاضل $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ف}^{\text{س}}}$

(وكميات ع و ف و س كلها متغيرة) لانه اذا وضعنا $\text{ف}^{\text{س}} = \text{ر}$ آلت المعادلة الى $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ر}}$

ومعادلتنا $\text{ص} = \text{ع}^{\text{ر}}$ و $\text{ر} = \text{ف}^{\text{س}}$ الشبيهتان بالمعادلة المأخوذ تفاضلها انفا ينشأ عنهما

$$\text{وص} = \text{ع}^{\text{ر}}\left(\text{ر}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع ور}\right)$$

$$\text{ور} = \text{ف}^{\text{س}}\left(\text{س}\,\frac{\text{وف}}{\text{ف}} + \text{لوغا ف وس}\right)$$

كما فى المثال السابق فى اول البند

واذا وضعنا فى مقدار وص المبين بالمعادلة التى قبل الاخيرة عوضا عن ور و ر مقاديرها وجدنا

$$\text{وص} = \text{ع}^{\text{ف}^{\text{س}}}\left[\text{ف}^{\text{س}}\,\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{لوغا ع}\,\text{ف}^{\text{س}}\left(\text{س}\,\frac{\text{وف}}{\text{ف}} + \text{لوغا ف وس}\right)\right]$$

$$= \text{ع}^{\text{ف}^{\text{س}}}\,\text{ف}^{\text{س}}\left(\frac{\text{وع}}{\text{ع}} + \text{س لوغا ع}\,\frac{\text{وف}}{\text{ف}} + \text{لوغا ع لوغا ف وس}\right)$$

(فى قضية تيلور)

* ٥٢ * قبل التجوّز ننبه ان الكمية التى ككمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ فى حساب التفاضل تدل على انه أخذ تفاضل دالة ص المتعلقة بتغير واحد

اوبجملة

أو بجملة متغيرات وهذا الاخذ كان بالنسبة الى متغير سـ ثم قسم الناتج على وا سـ كما لو كان صـ = حـ سـ^٢ ع^٣ ر^٤ مثلا فان كمية $\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}}$ فيها توجد باخذ التفاضل بحسب سـ يعني باعتبار كميتى ع و ر ثابتتين ثم بقسم التفاضل على واسـ فيحدث من ذلك

$$\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}} = ٢ \text{ حـ ع}^٣ \text{ ر}^٤ \text{ سـ}$$ وكذا يوجد أن

$$\frac{\text{واصـ}}{\text{واع}} = ٣ \text{ حـ سـ}^٢ \text{ ع}^٢ \text{ ر}^٤ \quad \text{و} \quad \frac{\text{واصـ}}{\text{وار}} = ٤ \text{ حـ سـ}^٢ \text{ ع}^٣ \text{ ر}^٣$$

واذا فرض صـ = سـ^٢ + ع^٢ فانه يوجد

$$\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}} = ٢\text{سـ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{واصـ}}{\text{واع}} = ٢\text{ع}$$

* ٥٣ * اذا غير متغير سـ بكمية سـ + هـ فى دالة بهذه الصورة صـ = ى سـ ثم اخذ تفاضل طرفيها باعتبار كمية هـ ثابتة وكمية سـ متغيرة فأقول أن المكرر التفاضلى لها فى هذه الحالة يساوى المكرر التفاضلى لها حين يؤخذ تفاضلها باعتبار كمية هـ متغيرة وكمية سـ ثابتة وبرهان ذلك هو أنه حيث كان بتغيير سـ بكمية سـ + هـ يوجد

صَـ = د(سـ + هـ) او

صَـ = د سَ بفرض سـ + هـ = سَ فبأخذ تفاضل الطرفين يكون واصَـ = وا.د سَ لكن تفاضل دالة سَ يتركب من حاصل ضرب دالة اخرى الى سَ فى وا سَ

فاذا فرض ان هذه الدالة تكون د سَ حدث من ذلك

واصَـ = د سَ واسَ وبوضع سـ + هـ عوضا عن سَ يكون

واصَـ = د (سـ + هـ) وا (سـ + هـ)

ومن البين ان التغير الذى يتسبب من جعل سـ متغيرة و هـ ثابتة فى هذا

التفاضل لم يخرج عن مضروب وا (س + هـ) الذى يؤول فى هذه الحالة
الى وا س فمن اجل ذلك يكون

$$\text{وا صَ} = \text{ى} \; (\text{س} + \text{هـ}) \; \text{وا س}$$ ومنه يستخرج

$$\frac{\text{وا صَ}}{\text{وا س}} = \text{ى} \; (\text{س} + \text{هـ}) \; \cdots\cdots\cdots \; (٢٦)$$

واما اذا كانت س هى الثابتة وكمية هـ هى المتغيرة فان مضروب
وا (س + هـ) يؤول الى وا هـ ويكون

$$\text{وا صَ} = \text{ى} \; (\text{س} + \text{هـ}) \; \text{وا هـ}$$ ومنه ينتج

$$\frac{\text{وا صَ}}{\text{وا هـ}} = \text{ى} \; (\text{س} + \text{هـ}) \; \cdots \; (٢٧)$$

وبمساواة مقدارى ى (س + هـ) ببعضهما يكون

$$\frac{\text{وا صَ}}{\text{وا س}} = \frac{\text{وا صَ}}{\text{وا هـ}}$$ وهو المطلوب بيانه واثباته

مثال ذلك $\text{صـ} = \text{حـ} \; \text{س}^{٣}$ فانه يحدث بوضع (س+هـ) محل س
$\text{صَ} = \text{حـ} \; (\text{س} + \text{هـ})^{٢}$ وبأخذ التفاضل بفرض س متغيرة
وعكسه يوجد

$$\frac{\text{وا صَ}}{\text{وا س}} = ٣ \cdot \text{حـ} \; (\text{س}+\text{هـ})^{٢} = \frac{\text{وا صَ}}{\text{وا هـ}}$$ ومن ثم $$\frac{\text{وا صَ}}{\text{وا س}} = \frac{\text{وا صَ}}{\text{وا هـ}}$$

* ٥٤ * حيث انه بأخذ تفاضل معادلتى (٢٦) و (٢٧)
بالنسبة الى س + هـ توجد ايضا نواتج متساوية

$$\frac{\text{وا}^{٢}\text{صَ}}{\text{وا س}} = \text{ىَ}(\text{س}+\text{هـ}) \; \text{وا} \; (\text{س}+\text{هـ})$$

$$\frac{\text{وا}^{٢}\text{صَ}}{\text{وا هـ}} = \text{ىَ}(\text{س}+\text{هـ}) \; \text{وا} \; (\text{س}+\text{هـ})$$

فاذا جعلنا هـ ثابتة فى الاولى و س ثابتة فى الثانية يحدث

وا^٢

$$\frac{و^{2}صَ}{وس} = دً\,(س+ه)\,وس \quad أو \quad \frac{و^{2}صَ}{وس^{2}} = دً\,(س+ه)$$

$$\frac{و^{2}صَ}{وه} = دً\,(س+ه)\,وه \quad أو \quad \frac{و^{2}صَ}{وه^{2}} = دً\,(س+ه)$$

وينتج من ذلك أن $\frac{و^{2}صَ}{وس^{2}} = \frac{و^{2}صَ}{وه^{2}}$

وبمثل هذا يثبت أن

$$\frac{و^{3}صَ}{وس^{3}} = \frac{و^{3}صَ}{وه^{3}} \;،\; \frac{و^{4}صَ}{وس^{4}} = \frac{و^{4}صَ}{وه^{4}} \quad وهلم جرا$$

* ٥٥ * هذا ولتكن صَ دالة الى سَ + ه فنحل هذه الدالة بالنسبة الى قوى ه ونفرض انه يوجد

$$صَ = ص + ح\,ه + حَ\,ه^{2} + حً\,ه^{3} + حٌ\,ه^{4} + الخ \quad (٢٨)$$

وكميات ص و ح و حَ و حً و حٌ .... الخ هى دوال الى كمية س مجهولة ولنشرع فى تعيينها بأن نأخذ تفاضل طرفى معادلة (٢٨) بالنسبة الى متغير ه ونقسم الناتج على وه فيوجد

$$\frac{وصَ}{وه} = ح + ٢حَ\,ه + ٣حً\,ه^{2} + ٤حٌ\,ه^{3} + الخ$$

ونأخذ تفاضلها بالنسبة الى متغير س ايضا ونقسم الناتج على وس فيحدث

$$\frac{وصَ}{وس} = \frac{وص}{وس} + \frac{وح}{وس}\,ه + \frac{وحَ}{وس}\,ه^{2} + \frac{وحً}{وس}\,ه^{3} + الخ$$

ولما كان الطرفان الاولان لهاتين المعادلتين متساويين بمقتضى (بند ٥٣) لزم ان يكون الطرفان الثانيان متطابقين اعنى متساويين تساويا تتساوى فيه مكررات قوى ه المتناظرة بحيث يكون

$$\text{ح}=\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\ \text{و}\ ٢\text{حَ}=\frac{\text{وح}}{\text{وس}}\ \text{و}\ ٣\text{حً}=\frac{\text{وحَ}}{\text{وس}}\ \text{و}\ ٤\text{حٌ}=\frac{\text{وحً}}{\text{وس}}\ \text{الخ او}$$

$$\text{ح}=\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\ \text{و}\ \text{حَ}=\frac{\text{وح}}{٢\,\text{وس}}\ \text{و}\ \text{حً}=\frac{\text{وحَ}}{٣\,\text{وس}}\ \text{و}\ \text{حٌ}=\frac{\text{وحً}}{٤\,\text{وس}}\ \text{الخ}$$

وبوضع مقدار ح الذى هو $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ المبين بالاولى من المعادلات الاخيرة

فى المعادلة الثانية منها يوجد

$\text{حَ}=\frac{١}{١\times٢}\,\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ وبوضع هذا المقدار عوضا عن حَ فى المعادلة

الثالثة التى هى $\text{حً}=\frac{\text{وحَ}}{٣\,\text{وس}}$ يحدث $\text{حً}=\frac{١}{١\times٢\times٣}\,\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}$

وهلم جرا ثم انه بواسطة مقادير ح و حَ و حً ..... الخ هذه تؤول معادلة (٢٨) الى

$$\text{صَ}=\text{ص}+\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\text{هـ}+\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{١\times٢\times٣}+\text{الخ}$$

وبوضع مقدار صَ فى هذه يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ})=\text{ص}+\frac{\text{وص}}{\text{وس}}\text{هـ}+\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢}+\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{وس}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{١\times٢\times٣}+\text{الخ}$$

وهذا هو قانون تيلور ودستوره

(تطبيق قانون تيلور على حل وتسلسل جملة دوال متنوعة)

* ٥٦ * ليكن $\text{صَ}=\sqrt{\text{س}+\text{هـ}}$ فيحدث منه

$\text{ص}=\sqrt{\text{س}}=\text{س}^{\frac{١}{٢}}$ واذن يكون

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}}=\frac{١}{٢}\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}}=\frac{١}{٢}\,\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\qquad \text{و}$$

$\text{و}^{٢}$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}} = -\frac{١}{٤}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} = -\frac{١}{٤}\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٣}}} \quad \text{و}$$

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٣}} = \frac{٣}{٨}\text{س}^{-\frac{٥}{٢}} = \frac{٣}{٨\sqrt{\text{س}^{٥}}} \ \text{الخ}$$

ثم توضع هذه المقادير فى قانون تيلور فيوجد

$$\sqrt{\text{س}+\text{ه}} = \sqrt{\text{س}} + \frac{١}{٢}\frac{\text{ه}}{\sqrt{\text{س}}} - \frac{١}{٨}\frac{\text{ه}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٣}}} + \frac{١}{١٦}\frac{\text{ه}^{٣}}{\sqrt{\text{س}^{٥}}} \ \text{الخ}$$

* ٥٧ * ليكن $\text{صَ} = \text{جا}\,(\text{س}+\text{ه})$ فينتج من ذلك أن $\text{ص} = \text{جاس}$ واذن يتيسر تشكيل المكررات التفاضلية المتوالية هكذا

$$\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{س}} = \text{جتاس} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}} = -\text{جاس} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٣}} = -\text{جتاس}$$

$$\text{و} \quad \frac{\text{و}^{٤}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٤}} = \text{جاس} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٥}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٥}} = \text{جتاس} \ \text{والخ}$$

وبوضع هذه فى قانون تيلور يوجد

$$\text{جا}(\text{س}+\text{ه}) = \text{جاس} + \text{جتاس}\frac{\text{ه}}{١} - \text{جاس}\frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢} - \text{جتاس}\frac{\text{ه}^{٣}}{١\times٢\times٣}$$
$$+ \text{جاس}\frac{\text{ه}^{٤}}{١\times٢\times٣\times٤} + \text{جتاس}\frac{\text{ه}}{١\times٢\times٣\times٤\times٥} \ \text{والخ}$$

واذا فرضنا ان $\text{س} = ٠$ يكون $\text{جاس} = ٠$ و $\text{جتاس} = ١$ والناتج الاخير يؤول الى

$$\text{جاه} = \text{ه} - \frac{\text{ه}^{٣}}{٢\times٣} + \frac{\text{ه}^{٥}}{٢\times٣\times٤\times٥} - \text{الخ}$$

واذا اخذت $\text{صَ} = \text{جتا}\,(\text{س}+\text{ه})$ وجدت بعد اجراء عمل مشابه للسابق أن

$$\text{جتاه} = ١ - \frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢} + \frac{\text{ه}^{٤}}{١\times٢\times٣\times٤} - \text{الخ}$$

* ٥٨ * نبحث ايضا عن حل لوغا $(\text{س}+\text{ه})$ ولذلك نضع $\text{صَ} = \text{لوغا}\,(\text{س}+\text{ه})$ فيكون

صـ = لوغا سـ وبأخذ التفاضل يحدث

وصـ = و٠ لوغا سـ = $\frac{\text{وسـ}}{\text{سـ}}$ ومنه ينتج .

$\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}} = \frac{1}{\text{سـ}}$ ثم يوجد بالتفاضلات المتوالية

$\frac{\text{و}^2\text{صـ}}{\text{وسـ}^2} = -\frac{1}{\text{سـ}^2}$ و $\frac{\text{و}^3\text{صـ}}{\text{وسـ}^3} = \frac{2}{\text{سـ}^3}$ الخ

وبوضع هذه المقادير فى قانون تيلور يوجد

$$\text{لوغا (سـ+هـ)} = \text{لوغا سـ} + \frac{\text{هـ}}{\text{سـ}} - \frac{\text{هـ}^2}{2\text{سـ}^2} + \frac{\text{هـ}^3}{3\text{سـ}^3} \text{ الخ}$$

* ٥٩ * يمكن بالسهولة ايجاد تفاضل اللوغاريتم بواسطة القانون الاخير اللوغاريتمى اذا فرض ان هذا القانون موجود بواسطة الجبر فقط كما هو مبين فى الملحوظة الاولى فى آخر هذا الكتاب وبالحقيقة فانه يحدث منه

$$\frac{\text{لوغا(سـ+هـ)} - \text{لوغا سـ}}{\text{هـ}} = \frac{1}{\text{سـ}} - \frac{\text{هـ}}{2\text{سـ}^2} + \text{ الخ}$$

وحين نرتقى الى النهاية نجد

$\frac{\text{و٠ لوغا سـ}}{\text{وسـ}} = \frac{1}{\text{سـ}}$ ومنه يحدث

$$\text{و٠ لوغا سـ} = \frac{\text{وسـ}}{\text{سـ}}$$

وحيث انه قد علم تفاضل اللوغاريتم فيسهل من بعده ايجاد تفاضل $\text{ح}^{\text{سـ}}$ لانه بفرض صـ = $\text{ح}^{\text{سـ}}$ واخذ اللوغاريتم الطبيعى لكل من الطرفين يوجد

لوصـ = لو $\text{ح}^{\text{سـ}}$ = سـ لوح وبأخذ التفاضل يحدث

$\frac{\text{وصـ}}{\text{صـ}}$ = وسـ لوح وينتج من ذلك

وصـ = صـ وسـ لوح وبوضع $\text{ح}^{\text{سـ}}$ عوضا عن صـ يكون

$$\text{وَ}\cdot\text{ح}^{\text{س}} = \text{ح}^{\text{س}}\,\text{وَس}\ \text{لوح}$$

* ٦٠ * يمكن استنتاج قانون مكلوران من قانون تيلور بالوجه الآتى وهو ان تجعل $\text{س} = ٠$ فى قانون تيلور الذى هو

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{دس} + \frac{\text{وَ}\cdot\text{دس}}{\text{وَس}}\,\text{ه} + \frac{\text{وَ}^{٢}\cdot\text{دس}}{\text{وَس}^{٢}}\,\frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢}\ \text{الخ}$$

وترمز برمز (دس) لما تؤول اليه دس حين يفرض فيها $\text{س} = ٠$ وبرمز $\left(\frac{\text{وَ}\cdot\text{دس}}{\text{وَس}}\right)$ لما تؤول اليه كمية $\frac{\text{وَدس}}{\text{وَس}}$ حين يفرض فيها $\text{س} = ٠$ وهلم جرا نظرا لباقى المكررات التفاضلية فالقانون المذكور يؤول حينئذ الى

$$\text{ده} = (\text{دس}) + \left(\frac{\text{وَ}\cdot\text{دس}}{\text{وَس}}\right)\text{ه} + \left(\frac{\text{وَ}^{٢}\cdot\text{دس}}{\text{وَس}^{٢}}\right)\frac{\text{ه}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}$$

و ه فى هذه المعادلة تدخل فى ده كما تدخل س فى دس بحيث لو غيرت ه بكمية س آلت ده الى دس وحيث لم يبق اثر الى س فى المعادلة الاخيرة فلا سبيل لعدم التغيير وبالحقيقة فلا فرق بين وضع اى حرف مكان ه وبين ه ومن ثم يوجد باجراء هذا التغيير

$$\text{دس} = (\text{دس}) + \left(\frac{\text{وَ}\cdot\text{دس}}{\text{وَس}}\right)\text{س} + \left(\frac{\text{وَ}^{٢}\cdot\text{دس}}{\text{وَس}^{٢}}\right)\frac{\text{س}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}$$

وهذا هو قانون مكلوران

(فى تفاضل المعادلات التى بمتغيرين)

* ٦١ * لتكن $\text{ك}(\text{س}\,\text{و}\,\text{ص}) = ٠$ (٢٩)

معادلة بمتغيرين فبحلها بالنسبة الى ص يوجد $\text{ص} = \text{دس}$ واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة (٢٩) فتؤول الى

ى (س و دس) = ٠ أو الى

دس = ٠ اختصارا

وهذه المعادلة الاخيرة هي متطابقة وجميع حدودها يمحو بعضها بعضا باخذ س اى مقدار كان فاذا لم تزد هذه المعادلة عن الدرجة الثالثة مثلا امكن وضعها هكذا ع س^{3} + ح س^{2} + ب س + و = ٠

وحيث انها لاتزال متحققة بأخذ متغير س اى مقدار كان فتتحقق بوضع س + هـ فيها عوضا عن س ويوجد حينئذ

ع (س+هـ)^{3} + ح (س+هـ)^{2} + ب (س+هـ) + و = ٠

ويعلم من ذلك انه متى كان دس = ٠ فلابد وان يكون د (س+هـ) = ٠ ايضا مهما كانت كمية س هذا واذا طرحت من هذه المعادلة معادلة دس = ٠ بقي

د (س+هـ) − دس = ٠ أو

(د(س+هـ) − دس) / هـ = ٠

ولكن د (س+هـ) = دس + ع هـ + ح هـ^{2} + ب هـ^{3} + الخ

فيستخرج منه (د(س+هـ) − دس) / هـ = ع + ح هـ + ب هـ^{2} + الخ

وحيث كان الطرف الاول لهذه المعادلة صفرا فيكون

ع + ح هـ + ب هـ^{2} + ... الخ = ٠ كذلك وبالارتقاء الى النهاية يكون

و۰دس / و۰س = ع = ٠ وبحذف المقام يوجد

و۰دس = ع و۰س = ٠ وبابقاء ص يوجد

و۰ى (س و ص) = ع و۰س = ٠

ويعلم من ذلك انه اذا اخذ تفاضل معادلة ى (س و ص) = ٠ باعتبار كمية ص فيها دالة لمتغير س امكن مساواة الناتج بصفر ويستعين

بذلك

بذلك على ايجاد مقدار مكرر $\frac{وص}{وس}$ التفاضلى كما ستراه فى المثال الآتى

وهو ان تفرض $ى\,(س\,و\,ص) = س^{٢} + ٣ح\,ص - ص^{٢} = ٠$ (٣٠)

فتأخذ تفاضلها بالطرق المعتادة وتلاحظ مساواة الناتج بصفر كما تقدم برهانه فتجد

$$٢س\,وس + ٣ح\,وص - ٢ص\,وص = ٠ \quad (٣١)$$

ومنها يحدث $\frac{وص}{وس} = \frac{٢س}{٢ص - ٣ح}$ ...... (٣٢)

* ٦٢ * لمطابقة الطريقة التى استعملت لايجاد هذا المقدار مع الطريقة التى استعملناها من اول الامر الى الآن ينظر انه يلزم اولا للعمل بالطريقة الاولى ان توضع معادلة (٣٠) بهذه الصورة

$$ص = د\,س\,.$$

يعنى انه ينبغى حلها بالنسبة الى ص ليستخرج منها بواسطة التفاضل مقدار $\frac{وص}{وس}$ فبسلوك هذه الطريقة نجد اولا

$ص = \frac{٣ح}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤}ح^{٢} + س^{٢}}$ ثم نجد بواسطة التفاضل

$$\frac{وص}{وس} = \pm \frac{س}{\sqrt{\frac{٩}{٤}ح^{٢} + س^{٢}}}$$

ومقدار $\frac{وص}{وس}$ هذا متبين بصورة مخالفة للتى فى معادلة (٣٢)

لكن اذا وضع مقدار ص المستخرج من (٣٠) فى معادلة (٣٢) يوجد

$$\frac{وص}{وس} = \pm \frac{٢س}{٢\sqrt{\frac{٩}{٤}ح^{٢} + س^{٢}}} = \pm \frac{س}{\sqrt{\frac{٩}{٤}ح^{٢} + س^{٢}}}$$

وهو كالمبين قبل ومعادلة (٣١) هى التفاضل الاول لمعادلة (٣٠)

ولايجاد المعادلة التي يعلم بها المكرر التفاضلي بدرجة ثانية يعني $\frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}$

تقسم حدود معادلة (٣١) على وس ويجعل $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ح}$

فتؤول هذه المعادلة الى $\text{٢س} + \text{٣د ح} - \text{٢ص ح} = ٠$

واذا اعتبرنا فيها بعد ذلك كميتي ص و ح كدالتين لمتغير س نجد بواسطة التفاضل

$$\text{٢وس} + \text{٣د وح} - \text{٢ص وح} - \text{٢ح وص} = ٠$$

وبالقسمة على وس ووضع ح عوضا عن $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ يوجد

$$٢ + \text{٣د}\frac{\text{وح}}{\text{وس}} - \text{٢ص}\frac{\text{وح}}{\text{وس}} - \text{٢ح}^{2} = ٠$$ ومنها

يستخرج $$\frac{\text{وح}}{\text{وس}} = \frac{\text{٢ح}^{2} - ٢}{\text{٣د} - \text{٢ص}} \quad .... \quad (٣٣)$$

لكن حيث ان $\text{ح} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ فيستخرج منه $\frac{\text{وح}}{\text{وس}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}}$

وبوضع هذه المقادير في معادلة (٣٣) عوضا عن ح و $\frac{\text{وح}}{\text{وس}}$

يوجد بعد حذف المقام

$$\text{و}^{2}\text{ص}\,(\text{٣د} - \text{٢ص}) = \text{٢وص}^{2} - \text{٢وس}^{2} \quad .... \quad (٣٤)$$

وهذا هو التفاضل الثاني لمعادلة (٣٠) ولاجل ايجاد التفاضل الثالث

نجعل $\frac{\text{وح}}{\text{وس}} = \text{حَ}$ فتؤول معادلة (٣٣) بعد حذف مقامها الى

$$\text{٣د حَ} - \text{٢ص حَ} = \text{٢ح}^{2} - ٢$$

ثم نعتبر كميات ص و ح و حَ كدوال لمتغير س ويؤخذ

التفاضل

التفاضل وتكمل العملية كما فى ايجاد التفاضل الثانى فيحدث التفاضل الثالث وهلم جرّا

* ٦٣ * وعوضا عن استعمال حروف ع و عَ و عً و الخ لاجل اجراء العمليات يؤخذ تفاضل معادلة (٣١) ويوضع فيها وٓصـ بدلا عن تفاضل صـ و و٢صـ بدلا عن تفاضل وصـ و و٣صـ بدلا عن تفاضل و٢صـ وهكذا باعتبار وسـ ككمية ثابتة فينتهى الى ناتج كالسابق ويوجد بهذه الكيفية

$$ ٢أ وسـ^٢ + ٣ح و^٢صـ - ٢ وصـ^٢ - ٢ صـ و^٢صـ = ٠ $$

وهذه المعادلة هى كمعادلة (٣٤)

* ٦٤ * ولنبحث الآن عن المقدار العمومى لتفاضل معادلة

$$ د(سـ و صـ) = ٠ $$

ولذلك نرمز لكمية د (سـ و صـ) بحرف ع فنجد باخذ تفاضل هذه الدالة بالنسبة الى متغير سـ هذا الحد $\frac{وع}{وسـ}$ وسـ

ونجد ايضا باخذ تفاضلها بالنسبة الى متغير صـ هذا الحد الثانى

$\frac{وع}{وصـ}$ وصـ ويكون حينئذ و . د (سـ و صـ) أو

$$ وع = \frac{وع}{وسـ} وسـ + \frac{وع}{وصـ} وصـ $$

واذا كانت صـ معتبرة دالة لمتغير سـ فانه يوجد بأخذ تفاضلها وصـ $= \frac{وصـ}{وسـ}$ وسـ

وبوضع هذا المقدار فى كمية وع يكون

$$ وع = \frac{وع}{وسـ} وسـ + \frac{وع}{وصـ} \frac{وصـ}{وسـ} وسـ $$

* ٦٥ * واذا راجعت القضية المثبوتة فى (بند ٢٤) شاهدت ان

كمية ع معتبرة كدالة لمتغير صـ وصـ معتبرة كدالة لمتغير سـ وحاصل ضرب $\frac{\text{وع}}{\text{وصـ}}\ \frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ ليس الا التفاضل ع الماخوذ بنسبة سـ الداخلة في صـ

* ٦٦ * لما كان التفاضل الكلي لدالة محتوية على سـ وصـ يعلم بمعادلة

$$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وسـ}}\ \text{وسـ} + \frac{\text{وع}}{\text{وصـ}}\ \text{وصـ}$$

سميت كميات $\frac{\text{وع}}{\text{وسـ}}\ \text{وسـ}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وصـ}}\ \text{وصـ}$ بالتفاضلات الجزئية للدالة ع

وكذلك اذا كانت ع دالة لمتغيرات سـ و صـ و ر الثلاث التي ليست بمعلقة فانه يوجد

$$\text{وع} = \frac{\text{وع}}{\text{وسـ}}\ \text{وسـ} + \frac{\text{وع}}{\text{وصـ}}\ \text{وصـ} + \frac{\text{وع}}{\text{ور}}\ \text{ور}$$

والحدود $\frac{\text{وع}}{\text{وسـ}}\ \text{وسـ}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{وصـ}}\ \text{وصـ}$ و $\frac{\text{وع}}{\text{ور}}\ \text{ور}$ تكون هي التفاضلات الجزئية للدالة ع

* ٦٧ * قد ذكرنا في (بند ٥٢) ان الكمية التي ككمية $\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}$ تبين انه اخذ تفاضل دالة صـ بالنسبة لمتغير سـ وقسم الناتج بعد ذلك على وسـ فينتج من ذلك انه اذا وجدت معادلة $\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}} = \text{ح}$ واستخرج منها

$$1 = \frac{\text{ح}}{\frac{\text{وصـ}}{\text{وسـ}}}$$

فلا يمكن ان يستنتج منها $1 = \text{ح}\ \frac{\text{وسـ}}{\text{وصـ}}$ بدون برهان لان التفاضل

في

فى المعادلة الاخيرة لم يكن ماخوذا بالنسبة الى س بل هو مأخوذ بالنسبة الى ص ولا يعرف هل التفاضل فى الحالة الاخيرة كالتفاضل فى الحالة الاولى اولا ولرفع هذا الاشكال نقول انه قد ثبت فى (بند ٢٤) ان

$$\frac{وع}{وس} = \frac{وع}{وص} \frac{وص}{وس}$$

فاذا فرضنا ان ع = س فتؤول هذه المعادلة الى

$$١ = \frac{وس}{وص} \frac{وص}{وس} \quad \text{ومنه يحدث} \quad \frac{وس}{وص} = \frac{١}{\frac{وص}{وس}}$$

وهذا يبين ان تغيير فرضية التفاضل تتوافق مع الجبر وقواعده

* ٦٨ * ولنثبت القضية المتقدمة من اول وهلة باثبات آخر فنقول

ليكن $\frac{صَ - ص}{سَ - س} = ع + ح هـ + حَ هـ^٢ + حً هـ^٣ + \text{الخ}$

فيحدث منه $\frac{سَ - س}{صَ - ص} = \frac{١}{ع + ح هـ + حَ هـ^٢ + حً هـ^٣ + \text{الخ}}$

وباجراء عملية القسمة على الطرف الثانى او بحله بواسطة قانون مكلوران يوجد

$$\frac{سَ - س}{صَ - ص} = \frac{١}{ع} - \frac{ح}{ع} هـ + \cdots\cdots \text{الخ}$$

وفى النهاية يوجد $\frac{وس}{وص} = \frac{١}{ع}$ وحيث ان ع $= \frac{وص}{وس}$ ينتج

من ذلك ان $\frac{وس}{وص} = \frac{١}{\frac{وص}{وس}}$ ويثبت المطلوب

(فى طريقة المماسات)

* ٦٩ * الطريقة التى يوجد بها المقدار التفاضلى للماس وتحت المماس والخط العمودى وتحت العمودى تسمى بطريقة المماسات وليكن لبيان ذلك س و ص بعدا نقطة م المأخوذة من نقطة منحن ما (شكل ٤)

فتزيد الافقى اح = س كمية ح حَ = هـ ونرسم الرأسى حَ مَ
ونمر بنقطتى م و مَ قاطع مَ ع فمن البين انه كلما نقص ح حَ
مال خط ح ع الى الانطباق على تحت المماس ح ط ولا يزال كذلك الى
ان ينعدم ح حَ = هـ فيؤول ح ع الى تحت المماس ح ط
فى النهاية ويعلم من ذلك ان ح ط هو النهاية او الحد الذى يميل نحوه ح ع
ولنبحث الآن عن المقدار الجبرى لخط ح ع ليستخرج منه نهايته ولذلك
ننظر انه يحدث من تشابه مثلثى مَ م ك و م ع ح هذا التناسب

مَ ك : م ك :: م ح : ح ع أو

مَ ك : هـ :: ص : ح ع ومنه يستخرج

$$ح ع = \frac{هـ ص}{مَ ك}$$ ولتعيين مَ ك نضع

مَ ك = مَ حَ − م ح لكن مَ حَ = صَ = د(س + هـ) فيكون

$$مَ حَ = ص + \frac{و ص}{و س} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ^2}{1 \times 2} + \cdots الخ$$

وغير ذلك م ح = ص فاذا طرحنا هاتين المعادلتين من بعضهما فيوجد

$$مَ حَ - م ح \text{ او } مَ ك = \frac{و ص}{و س} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ^2}{1 \times 2} + الخ$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى مقدار ح ع عوضا عن مَ ك نجد أن

$$ح ع = \frac{هـ ص}{\frac{و ص}{و س} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ^2}{1 \times 2} + \cdots\cdots الخ}$$

وبقسمة البسط والمقام على هـ يكون

$$ح ع = \frac{ص}{\frac{و ص}{و س} + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ}{1 \times 2} + \cdots\cdots الخ}$$

وحيث انه يوجد فى النهاية هـ = ٠ و ح ع يتغير بخط ح ط

فيستخرج

فيستخرج من المعادلة الاخيرة

$$ح ط = \frac{ص}{\frac{وا ص}{وا س}}$$ ومن بعد (بند ٦٧) يكون

$$ح ط = ص \frac{وا س}{وا ص}$$ أو وهو الاولى

$$ح ط = صَ \frac{وا سَ}{وا صَ}$$ = تحت المماس بالرمز بحرفى سَ و صَ لبعدى نقطة م

* ٧٠ * اذا رسمنا من نقطة م (شكل ٥) خط م ه عمودا على م ط فتحت العمودى يكون ح ه ولتعيينه نعتبر تناسب

$$ح ط : ح م :: ح م : ح ه$$ أو

$$صَ \frac{وا سَ}{وا صَ} : صَ :: صَ : ح ه$$ فيحدث منه

$$ح ه = صَ \frac{وا صَ}{وا سَ}$$ = تحت العمودى

واما من قبل الخط المماس والخط العمودى فنعتبر معادلتى

$$م ط = \sqrt{ح ط^{٢} + ح م^{٢}}$$ و

$$م ه = \sqrt{ح ه^{٢} + ح م^{٢}}$$

فيحدث من الاولى

$$م ط = \sqrt{صَ^{٢} \times \frac{وا سَ^{٢}}{وا صَ^{٢}} + صَ^{٢}} = صَ \sqrt{\frac{وا سَ^{٢}}{وا صَ^{٢}} + ١}$$ = المماس

و يحدث من الثانية

$$م ه = \sqrt{صَ^{٢} \times \frac{وا صَ^{٢}}{وا سَ^{٢}} + صَ^{٢}} = صَ \sqrt{\frac{وا صَ^{٢}}{وا سَ^{٢}} + ١}$$ = العمودى

* ٧١ * ولايجاد معادلة الخط المماس نفرض ان سَ و صَ يكونان ابعاد نقطة التماس التي هي م فعادلة مستقيم م ط المار بنقطة م يمكن بيانها برسم $ص - صَ = ح (س - سَ)$ وكمية ح في هذه المعادلة تبين ظل زاوية م ط ح ومقدار هذا الظل هو $\frac{ح م}{ط ح}$ لانه يحدث من متناسبة ح ط : ح م :: ١ : ظام ط ح

$$ظام ط ح = \frac{م ح}{ط ح}$$

ويتضح من بعد ذلك أن

$$ظام ط ح = \frac{ح م}{ح ط} = \frac{صَ}{تحت المماس} = \frac{صَ}{\frac{صَ}{\frac{و صَ}{و سَ}}} = \frac{و صَ}{و سَ}$$

فاذا وضعنا مقدار ح هذا في معادلة الخط المماس تؤول تلك المعادلة الى

$$ص - صَ = \frac{و صَ}{و سَ}(س - سَ)$$ وهي معادلة الخط المماس المطلوبة

ومعادلة الخط العمودي تكون حينئذ

$$ص - صَ = - \frac{و سَ}{و صَ}(س - سَ)$$

(تطبيق القوانين او الدساتير السابقة على الامثلة)

(المثال الاول)

* ٧٢ * المراد ايجاد تحت المماس للقطع المكافي ولذلك نأخذ تفاضل طرفي معادلة القطع المكافي التي هي $صَ^٢ = ح سَ$ بحسب نقطة التماس فيوجد $٢ صَ و صَ = ح و سَ$ ومنه يحدث

$$\frac{و صَ}{و سَ} = \frac{ح}{٢ صَ} \quad و \quad \frac{و سَ}{و صَ} = \frac{٢ صَ}{ح}$$

وبوضع هذا المقدار في معادلة

$$ح ط = ص \frac{و س}{و ص} \text{ يوجد}$$

$$ح ط = \frac{٢ ص^٢}{ح}$$

واذا وضعت فى المعادلة الاخيرة $ح س$ عوضا عن $ص^٢$ حدث لك

$$ح ط \text{ أو تحت المماس } = ٢ س$$

(المثال الثانى)

المراد ايجاد تحت العمودى للقطع الناقص ولذلك نأخذ تفاضل طرفى معادلة القطع الناقص التى هى $و^٢ س^٢ + م^٢ ص^٢ = م^٢ و^٢$ بجعل النقطة الاصلية مركزه فيوجد $٢ و^٢ س و س + ٢ م^٢ ص و ص = ٠$ ويستخرج من ذلك $\frac{و ص}{و س} = - \frac{و^٢ س}{م^٢ ص}$ ثم نضع هذا المقدار فى تحت العمودى $ح ن$ فيكون $ح ن$ او تحت العمودى $= - \frac{و^٢}{م^٢} س$

(المثال الثالث)

المراد ايجاد كمية الخط المماس للدائرة ولذلك نأخذ تفاضل معادلة الدائرة التى هى $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$ بحسب نقطة التماس فيوجد

$$٢ س و س + ٢ ص و ص = ٠ \text{ ومنه يحدث}$$

$$\frac{و ص}{و س} = - \frac{س}{ص} \text{ و } \frac{و س}{و ص} = - \frac{ص}{س}$$

ثم يوضع هذا المقدار فى معادلة

$$م ط = ص \sqrt{\frac{و س^٢}{و ص^٢} + ١} \text{ فتؤول تلك المعادلة الى}$$

$$م ط = ص \sqrt{\frac{ص^٢}{س^٢} + ١} = ص \sqrt{\frac{ص^٢ + س^٢}{س^٢}} = \frac{ص نق}{س} = \text{المماس}$$

(فى الخطوط المجانبة للخطوط المنحنية ويقال لها المقربة)

* ٧٣ * مقدار اط (شكل ٦) الذى هو بعد راس المنحنى عن نقطة تقابل الخط المماس بالخط الافقى يستخرج بالسهولة من معادلة الخط المماس لانه اذا جعلت رأس المنحنى التى هى ا نقطة اصلية كان خط اط هو بعد هذه الرأس عن النقطة التى يكون فيها الراسى م ح صفرا وحيث ان معادلة المماس م ط هى $\text{ص} - \text{صَ} = \frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}}(\text{س} - \text{سَ})$

فيكفى ان يجعل فى هذه المعادلة $\text{ص} = \text{٠}$ ليكون مقدار س الحادث منها مقدارا لخط اط ويوجد اذ ذاك

$\text{اط} = \text{س} = \text{سَ} - \text{صَ}\frac{\text{وسَ}}{\text{وصَ}}$ وهذا المقدار يكون هو بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الافقى ولايجاد بعد النقطة الاصلية عن نقطة تقابل الخط المماس بالاحداثى الرأسى نبحث عن مقدار اب بان نقول انه لما كان هذا الخط هو الرأسى الموافق الى $\text{س} = \text{٠}$ فى معادلة الخط المماس فيجب وضع $\text{س} = \text{٠}$ حينئذ فى هذه المعادلة ليحدث منها $\text{ص} = \text{اب} = \text{صَ} - \frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}}\text{سَ}$

ونفرض الآن ان س تصير غير منتهية وابعاد اط و اب لاتزال منتهية المقدار محدودة فخط ط ل (شكل ٧) لايقطع المنحنى حينئذ الا على بعد غير محدود فهو الخط المقربى للمنحنى المفروض

* ٧٤ * ولنمثل بهذه المعادلة $\text{ص}^2 = \text{مس} + \text{هس}^2$

فنستخرج منها $\frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}} = \frac{\text{م} + \text{٢هسَ}}{\text{٢صَ}}$ واذن يكون

$$\text{اط} = \text{سَ} - \frac{\text{٢صَ}^2}{\text{م} + \text{٢هسَ}} = \frac{\text{مسَ} + \text{٢هسَ}^2 - \text{٢صَ}^2}{\text{م} + \text{٢هسَ}} = -\frac{\text{مسَ}}{\text{م} + \text{٢هسَ}}$$

$$\text{اب} = \text{صَ} - \frac{\text{مسَ} + \text{٢هسَ}^2}{\text{٢صَ}} = \frac{\text{٢صَ}^2 - \text{مسَ} - \text{٢هسَ}^2}{\text{٢صَ}}$$

ويوضع

وبوضع مقدار صَ عوضاعنها يوجد بعد الاختصار

$$\text{اط} = -\frac{\text{م سَ}}{\text{م} + \text{٢ ى سَ}} \quad \text{و} \quad \text{اب} = \frac{\text{م سَ}}{\sqrt{\text{٢ م سَ} + \text{ى سَ}^{٢}}}$$

وحين تقسيم كميتا كل من هذه الكسور على سَ يوجد

$$\text{اط} = -\frac{\text{م}}{\frac{\text{م}}{\text{سَ}} + \text{٢ى}} \quad \text{و} \quad \text{اب} = \frac{\text{م}}{\sqrt{\frac{\text{٢م}}{\text{سَ}} + \text{ى}}}$$

ثم بجعل سَ $= \infty$ فى هذه المقادير فيكون

$$\text{اط} = -\frac{\text{م}}{\text{٢ى}} \quad \text{و} \quad \text{اب} = \frac{\text{م}}{\sqrt{\text{ى}}} \qquad \cdots\cdots\cdots (٣٥)$$

و يعلم من ذلك انه يوجد للمنحنى المفروض مقربات مالم تكن كمية ى صفرا اوسالبة لانه حين تكون كمية ى سالبة يصير مقدار اب المبين بثانية معادلات (٣٥) تخيليا ومن البين انه متى كانت ى سالبة انتسبت المعادلة الى قطع ناقص وتكون المعادلة بعينها معادلة قطع مكافى متى كان مقدار ى صفرا وفى هذه الحالة يتبين من معادلات (٣٥) ان اط و اب يصيران غير منتهيين ويؤخذ منه ان القطع المكافى لامقرب له ولامجانب

فى معادلة المستوى المماس بسطح منحن ومعادلة الخط العمودى لهذا السطح

* ٧٥ * لتكن د (س و ص و ع) $=$ ٠ معادلة سطح منحن و ح س + ط ص + ى ع + ك $=$ ٠ معادلة مستو فاذا رمزنا بحروف سَ و صَ و عَ لأبعاد نقطة التماس التى هى م فمعادلة المستوى بالنسبة الى هذه النقطة تكون

$$\text{ح سَ} + \text{ط صَ} + \text{ى عَ} + \text{ك} = ٠$$

وبحذف ك من بين هاتين المعادلتين توجد المعادلة

$$\text{ح}(\text{س} - \text{سَ}) + \text{ط}(\text{ص} - \text{صَ}) + \text{ى}(\text{ع} - \text{عَ}) = ٠ \qquad (٣٦)$$

وهى معادلة المستوى المار بنقطة سَ و صَ و عَ ولنرسم مستويا موازيا لمستوى (س و ع) مارا بنقطة التماس سَ و صَ و عَ

فهذا المستوى يقطع السطح المنحنى المفروض فى منحنى م ح (شكل ٨) ويقطع المستوى المماس فى مستقيم م ل والمستقيم م ل يكون مماسا للمنحنى م ح والا لقطع السطح المماس السطح المنحنى

ويمكن استنتاج معادلة مستقيم م ل من معادلة (٣٦) لانه حيث كان هذا المستقيم وهو تقاطع المستوى المماس بالمستوى المار بنقطة التماس موازيا لسطح (س و ع) الاحداثى وكانت نقطة م توجد عليه فيوجد اذذاك لجميع نقطه ص = صَ أو ص ـ صَ = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى ح (س ـ سَ) + ى (ع ـ عَ) = ٠

ولما كانت هذه المعادلة تبين النسب الواقعة بين بعدى س و ع لاى نقطة من مستقيم م ل تكون هى معادلة هذا المستقيم ويمكن وضعها هكذا

ع ـ عَ = ـ ح/ى (س ـ سَ) .... (٣٧)

هذا واذا امعنت النظر ظهر لك ان معادلة السطح المنحنى المفروض التى هى د (س و ص و ع) = ٠ تؤول الى معادلة منحنى م ح اذا اعتبرت فيها ص ثابتة فاذا أردنا الآن معرفة شرط تماس مستقيم م ل بمنحنى م ح نراجع (بند ٧١) ومنه نتحقق انه يجب ان يكون مكرر كمية (س ـ سَ) من معادلة (٣٧) مساويا لمقدار وا عَ/وا سَ المستخرج من معادلة المنحنى م ح ولا يخفى ان معادلة هذا المنحنى هى معادلة السطح معتبرا فيها ص ثابتة ومن ثم يكفى ان يؤخذ تفاضل معادلة السطح المذكور ويستخرج منها وا ع/وا س لانه يعلم من بعد (بند ٥٢) ان الرمز وا ع/وا س يبين أن ص اعتبرت ثابتة فى اخذ التفاضل وينتج من ذلك انه بتشكيل س و ص هكذا سَ و صَ بعد اجراء العملية يكون شرط تماس م ل بالمنحنى م ح هكذا

$$- \frac{ح}{ى} = \frac{وا ع َ}{وا سَ} \text{ أو } ح = - ى \frac{وا ع َ}{وا سَ} \cdots (٣٨)$$

واذا رسمنا كذلك من نقطة م مستويا موازيا لمستوى (صـ و ع) الاحداثى فيقطع هذا المستوى السطح المفروض فى منحنى م ء ويقطع المستوى المماس فى مستقيم م ق ويكون هذا المستقيم مماسا المنحنى م ء وجميع نقطه تكون متساوية البعد عن مستوى (صـ و ع) يعنى تكون افقياتها كلها متساوية فيكون سـ = سَ أو سـ - سَ = ٠ وتؤول معادلة (٣٦) حينئذ الى المعادلة

ط (صـ - صَ) + ى (ع - عَ) = ٠ التى يستخرج منها

ع - عَ = - $\frac{ط}{ى}$ (صـ - صَ) وهذه المعادلة هى معادلة المستقيم م ق فيكون شرط تماس هذا المستقيم بالمنحنى م ء بمساواة مكرر كمية صـ - صَ للمكرر $\frac{وا ع َ}{وا صَ}$ التفاضلى المستخرج من معادلة السطح المفروض يعنى انه يوجد - $\frac{ط}{ى}$ = $\frac{وا ع َ}{وا صَ}$ ومن ثم

$$\text{يكون } ط = - ى \frac{وا ع َ}{وا صَ} \cdots\cdots\cdots\cdots (٣٩)$$

واذا وضعت مقادير ح و ط المبينة بمعادلتى (٣٨) و (٣٩) فى معادلة (٣٦) آلت هذه المعادلة الى

$$- ى \frac{وا ع َ}{وا سَ}(سـ - سَ) - ى \frac{وا ع َ}{وا صَ}(صـ - صَ) + ى (ع - عَ) = ٠$$

ومن هذه يستخرج

$$ع - عَ = \frac{وا ع َ}{وا سَ}(سـ - سَ) + \frac{وا ع َ}{وا صَ}(صـ - صَ) \quad (٤٠)$$

وهذه المعادلة هى معادلة المستوى المماس فى نقطة سَ و صَ و عَ

* ٧٦ * ولنبحث عن معادلة المستوى المماس بالكرة مثلا ولذلك نرمز لابعاد مركز الكرة بحروف هـ و و و ر فمعادلتها تكون

$$(س - هـ)^٢ + (ص - و)^٢ + (ع - ر)^٢ = نق^٢$$

ثم نعتبر ص ثابتة فى هذه المعادلة ونأخذ التفاضل فيوجد

$$٢(س - هـ) \, وس + ٢(ع - ر) \, وع = ٠$$ ومنه يحدث

$$\frac{وع}{وس} = \frac{هـ - س}{ع - ر}$$ وكذا نعتبر س ثابتة ونأخذ تفاضل معادلة الكرة المذكورة فيوجد

$$٢(ص - و) \, وص + ٢(ع - ر) \, وع = ٠$$ ومنه يحدث

$$\frac{وع}{وص} = \frac{و - ص}{ع - ر}$$ ومعادلة السطح المماس للكرة فى نقطة سَ و صَ و عَ تكون حينئذ

$$ع - عَ = \frac{هـ - سَ}{عَ - ر}(س - سَ) + \frac{و - صَ}{عَ - ر}(ص - صَ)$$

* ٧٧ * واذا كان هذا السطح يمر بنهاية القطر الرأسى يوجد

$سَ = هـ$ و $صَ = و$ و $عَ = ر + نق$ وتؤول معادلة السطح فى هذه الحالة الى $ع = ر + نق$ وهذه هى معادلة المستوى الموازى لسطح (س و ص) الاحداثى

* ٧٨ * معادلات الخط العمودى فى نقطة سَ و صَ و عَ يمكن حدوثها بالسهولة من معادلة السطح المماس وبيان ذلك ان نقول حيث انه يعلم من الهندسة التحليلية المسماة بالثلاثة ابعاد أن الشرط الواقع ليكون المستقيم الذى معادلتاه

$$\left.\begin{aligned} س &= ح ع + ى \\ ص &= ح_١ ع + ى_١ \end{aligned}\right\} \quad (٤١)$$

عمودا على المستوى الذى معادلته

$$\text{ح س} + \text{ط ص} + \text{ى ع} + \text{ك} = ٠ \quad (٤٢)$$

هو أن يوجد $\text{ح} = \text{ح ى}$ و $\text{ط} = \text{ح}_{١}\,\text{ى}$

فاذا حولنا جميع حدود معادلة (٤٠) فى الطرف الاول وطابقنا بعد ذلك حدودها بحدود معادلة (٤٢) يحدث لنا بمساواة مكررات كميات س و ص و ع ببعضها

$$\text{ح} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واسَ}} \quad \text{و} \quad \text{ط} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واصَ}} \quad \text{و} \quad \text{ى} = ١$$

ويعلم من ذلك انه يكون $\text{ح} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واسَ}}$ و $\text{ح}_{١} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واصَ}}$

فاذا وضعنا هذه المقادير عوضا عن ح و $\text{ح}_{١}$ فى معادلات (٤١) يوجد

$$\text{س} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واسَ}}\,\text{ع} + \text{د}$$

$$\text{ص} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واصَ}}\,\text{ع} + \text{د}_{١}$$

وحيث ان نقطة (سَ و صَ و عَ) تحقق هذه المعادلات لانها من جملة نقط المستقيم المستدل عليه بها يوجد ايضا

$$\text{سَ} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واسَ}}\,\text{عَ} + \text{د}$$

$$\text{صَ} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واصَ}}\,\text{عَ} + \text{د}_{١}$$

وبحذف د و $\text{د}_{١}$ من هذه المعادلات الاربع يوجد

$$\text{س} - \text{سَ} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واسَ}}\,(\text{ع} - \text{عَ})$$

$$\text{ص} - \text{صَ} = -\frac{\text{واعَ}}{\text{واصَ}}\,(\text{ع} - \text{عَ})$$

وهاتان المعادلتان هما معادلتا الخط العمودى فى نقطة (سَ و صَ و عَ)

(فى الدوال التى تؤول الى ÷ باحد المقادير التى يأخذها المتغير)

* ٧٩ * اذا آل كسر ككسر $\frac{ى س}{ء س}$ الى ÷ باخذ متغير س مقدارا يرمز اليه بحرف ح مثلا كان ذلك دليلا على وجود مضروب مشترك هو س ــ ح أو $(س - ح)^م$ على جهة العموم لكميتى الكسر المفروض واذا اسقط هذا المضروب المشترك امكن حدث المقدار الحقيقى للكسر المفروض

ولنفرض لبيان ذلك ان س ــ ح يكون مضروبا فى ى س م مرة وفى ء س ن مرة (مالم يقتض الحال الى جعل م و ن مساويين الى الوحدة او الى صفر) فيمكننا ان نضع

$$ى س = ع (س - ح)^م \quad و \quad ء س = ك (س - ح)^ن$$

ومنه يحدث $\frac{ى س}{ء س} = \frac{ع}{ك} (س - ح)^{م-ن}$ .... (٤٣)

وباخذ تفاضل المعادلة الاولى وقسمة جميع حدودها بعد ذلك على وا س يوجد

$$\frac{وا ى س}{وا س} = \frac{وا ع}{وا س} (س - ح)^م + م ع (س - ح)^{م-١}$$

ومن المشاهد ان مقدار $\frac{وا ى س}{وا س}$ يتركب من حدين يحتوى احدهما على مضروب س ــ ح بأس اصغر من أسه فى الدالة المفروضة بواحد

واذا اخذ المكرر التفاضلى لكمية $\frac{وا ى س}{وا س}$ شوهد بهذا المنوال انه يحتوى على حد متبوع بكمية $(س - ح)^م$ وحد آخر متبوع بكمية $(س - ح)^{م-١}$

وحد

وحدّ ثالث متبوع بكمية $(سـ - ح)^{م-٢}$ وهذا الحدّ الثالث يكون

$م (م - ١) ع (سـ - ح)^{م-٢}$ وبأدامة عملية أخذ التفاضل يشاهد ان

كل تفاضل مستجد يحتوى على كمية سـ - ح بأس كأسها

فى الدالة التى حدث منها هـذا التفاضل بلا واسطة زائدا حدّا يحتوى على

سـ - ح بأس اصغر من ذلك بواحد ويعلم منه انه بأخذ المكررات التفاضلية

المتوالية يكون الحدّ المحتوى على أقل قوى سـ - ح هو

$م ع (سـ - ح)^{م-١}$ .... فى التفاضل الاول

و $م (م - ١) ع (سـ - ح)^{م-٢}$ ...... فى التفاضل الثانى

و $م (م - ١) (م - ٢) ع (سـ - ح)^{م-٣}$ فى التفاضل الثالث

و $م (م - ١) (م - ٢) \cdots ع (سـ - ح)^{م-ن}$ فى التفاضل النونى

واذن يكون المكرر التفاضلى بدرجة ر للكمية ى سـ هكذا

$$\frac{و^{ر} ى سـ}{و سـ^{ر}} = س (سـ - ح)^{م} + سَ (سـ - ح)^{م-١} + سً (سـ - ح)^{م-٢} + $$
$$+ م (م - ١) (م - ٢) \cdots ع (سـ - ح)^{م-ر}$$

وماذكر فى شان ى سـ يمكن تطبيقه على د سـ فيحدث منها

$$\frac{و^{ر} د سـ}{و سـ^{ر}} = ع (سـ - ح)^{ن} + عَ (سـ - ح)^{ن-١} + \cdots + ن (ن - ١) \cdots ك (سـ - ح)^{ن-ر}$$

وبقسمة هذين المكررين على بعضهما يوجد

$$\frac{\dfrac{و^{ر} ى سـ}{و سـ^{ر}}}{\dfrac{و^{ر} د سـ}{و سـ^{ر}}} = \frac{س (سـ - ح)^{م} + سَ (سـ - ح)^{م-١} \cdots\cdots + م (م - ١) \cdots\cdots ع (سـ - ح)^{م-ر}}{ع (سـ - ح)^{ن} + عَ (سـ - ح)^{ن-١} \cdots\cdots + ن (ن - ١) \cdots\cdots ك (سـ - ح)^{ن-ر}} \cdots (٤)$$

* ٨٠ * وهنا نعتبر ثلاث حالات وهى م = ن و م > ن و م < ن

ففى الحالة الاولى وهى م = ن يؤول كل من كميتى $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-\text{ر}}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$ الى $(\text{س} - \text{ح})^{\cdot}$ اى الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المأخوذة وهو ر مساويا م وتؤول كميات $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-١}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{م}-٢}$ ...... الخ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-١}$ و $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-٢}$ ... الخ الى صفر بفرض س = ح ويعلم من ذلك ان جميع حدود البسط والمقام تحذف ماعدا الحد الاخير من كل منهما ومعادلة (٤٤) تؤول حينئذ الى

$$\frac{\dfrac{\text{و}^{\text{م}}\cdot\text{ى}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{م}}}}{\dfrac{\text{و}^{\text{م}}\cdot\text{ءس}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{م}}}}=\frac{\text{م}\,(\text{م}-١)\,(\text{م}-٢)\cdots\text{ح}}{\text{ن}\,(\text{ن}-١)\,(\text{ن}-٢)\cdots\text{ك}}=\frac{\text{ح}}{\text{ك}}=\frac{\text{ى}}{\text{ءس}}$$

وفى الحالة الثانية وهى التى يكون فيها م > ن تؤول كمية $(\text{س} - \text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}$ الى الواحد اذا كان عدد التفاضلات المجراة وهو ر مساويا الى ن وتكون أسس ن − ١ و ن − ٢ و ن − ٣ ... الخ و م − ١ و م − ٢ و م − ٣ ... الخ للكميات ذات الحدين الاخيرة اكبر من ن − ر فهى موجبة ويعلم من ذلك ان جميع هذه الكميات تؤول الى صفر بفرض س = ح فتحذف جميع الحدود المحتوية عليها حينئذ وتؤول معادلة (٤٤) الى

$$\frac{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}\cdot\text{ى}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{ن}}}}{\dfrac{\text{و}^{\text{ن}}\cdot\text{ءس}}{\text{و}\,\text{س}^{\text{ن}}}}=\frac{\cdot}{\text{ن}(\text{ن}-١)(\text{ن}-٢)\cdots\text{ك}\,(\text{س}-\text{ح})^{\text{ن}-\text{ر}}}=\frac{\cdot}{\text{ن}(\text{ن}-١)\cdots\text{ك}}=١٠$$

وبهذا

وبهذا يستدل على ان معادلة (٤٣) تؤول الى صفر حين يكون م > ن
واما الحالة الثالثة وهى الاخيرة التى فيها م < ن فان جميع الحدود
تحذف فيها ماعدا حد م (م ـ ١) (م ـ ٢) ... ح (س ـ ح)
بأخذ عدد التفاضلات الذى هو ر مساويا الى م ويبقى حينئذ

$$\frac{\frac{و^م \cdot ى س}{و س^م}}{\frac{و^م \cdot ء س}{و س^م}} = \frac{م(م-١)(م-٢)\cdots\cdots ح}{ب} = \infty$$

وهذا المقدار يدل على ان الطرف الثانى لمعادلة (٤٣) يصير غير متنه
فى الحالة التى يكون فيها م < ن

* ٨١ * وتنتج هذه القاعدة مما سبق وهى متى يراد تعيين المقدار
الحقيقى لكسر $\frac{ى س}{ء س}$ الذى يصير ÷ بأحد المقادير التى يأخذها المتغير
يؤخذ تفاضل كل من كميتى هذا الكسر على حدته ثم ينظر هل يؤول ناتجا
$\frac{و \cdot ى س}{و س}$ و $\frac{و \cdot ء س}{و س}$ الى صفر بالمقدار الذى يجعل $\frac{ى س}{ء س}$ آيلا الى
÷ اولا فان الا الى صفر اخذ المكرر التفاضلى لهما اى لكميتى $\frac{و^٢ \cdot ى س}{و س^٢}$
و $\frac{و^٢ \cdot ء س}{و س^٢}$ وينظر ايضا هل يؤول كل من النواتج الحادثة الى صفر
بالفرض المذكور اولا وهكذا انعدام العملية فان وجد بعد جملة عمليات ناتجان
لا يؤول كل منهما الى صفر بالفرض السابق فالكسر المتكون منهما يكون هو
المقدار الحقيقى للكسر المفروض واذا آل احدهما وهو البسط الى صفر فالمقدار
الحقيقى للكسر المفروض يكون صفرا او يكون مقدار هذا الكسر غير محدود اذا

إلى المقام وحده الى صفر .

(المثال الاول)

* ٨٢ * المراد معرفة المقدار الحقيقي لكسر $\frac{س^٣ - ح^٣}{(س - ح)^٤}$ الذى يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بفرض س = ح ولذلك نأخذ تفاضل كل من كميتى هذا الكسر فيوجد $\frac{٣س^٢}{٤}$ وحيث ان كميتى هذا الكسر الاخير لا يؤولان الى صفر بفرض س = ح فالمقدار الحقيقي لكسر $\frac{س^٣ - ح^٣}{(س - ح)^٤}$ حين يفرض س = ح يكون $\frac{٣ح^٢}{٤}$ وهو المطلوب

(المثال الثانى)

* ٨٣ * لمعرفة المقدار الحقيقي لكسر $\frac{س^٣ - ٣س + ٢}{س^٤ - ٦س^٢ + ٨س - ٣}$ حين يفرض س = ١ الذى يجعل هذا الكسر آيلا الى $\frac{٠}{٠}$ يؤخذ تفاضل البسط والمقام كل منهما على حدته ثم تقسم النواتج على بعضها فيوجد $\frac{٣س^٢ - ٣}{٤س^٣ - ١٢س + ٨}$ وحيث ان كلا من كميتى هذا الكسر الاخير يؤول الى صفر بالفرض السابق الذى هو س = ١ فيؤخذ التفاضل ثانيا فيحدث

$$\frac{٦س}{١٢س^٢ - ١٢}$$

ولما كان مقام هذا الكسر يؤول وحده الى صفر بفرض س = ١ علم من ذلك ان مقدار الكسر المفروض غير محدود

(المثال الثالث)

* ٨٤ * يفرض كسر $\frac{ح^س - ء^س}{س}$ الذى يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بفرض س = ٠ فيؤخذ تفاضل كل من البسط والمقام على حدته فيؤول هذا الكسر الى

$$\frac{ح^س لو ح - ء^س لو ء}{١}$$

وهو كسر يؤول الى لو ح ـ لو ء ولا تؤول كميتاه الى صفر بجعل

س

$س = ٠$ فيعلم من ذلك ان المقدار الحقيق للكسر المفروض حين يفرض $س = ٠$ هو لوح — لوء وكمية $س$ — ٠ أو $س$ تكون هى المضروب المشترك لكميتى ذلك الكسر ولاظهار هذا المضروب فى البسط الذى هو $ح^{س} — ء^{س}$ ننظر أنه يوجد من بعد (بند ٣٧) ان

$$ح^{س} = ١ + \frac{ح س}{١} + \frac{ح^٢ س^٢}{١ \times ٢} + \frac{ح^٣ س^٣}{١ \times ٢ \times ٣} + ... الخ$$

و

$$ء^{س} = ١ + \frac{حَ س}{١} + \frac{حَ^٢ س^٢}{١ \times ٢} + \frac{حَ^٣ س^٣}{١ \times ٢ \times ٣} + ... الخ$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$ح^{س} — ء^{س} = (ح — حَ) س + \frac{(ح^٢ — حَ^٢) س^٢}{١ \times ٢} + \frac{(ح^٣ — حَ^٣) س^٣}{١ \times ٢ \times ٣} + الخ$$

وبهذا يشاهد وجود مضروب $س$ فى $ح^{س} — ء^{س}$

* ٨٥ * حيث ان القاعدة التى ذكرناها لايجاد المقدار الحقيق للكسر الذى يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بأحد المقادير التى يأخذها المتغير مؤسسة على فرضية م و ن عددين صحيحين فلا يمكن استعمالها فى الحالات التى تكون فيها هاتان الكميتان كسورا اذ لا يمكن الوقوف على حد كذ $س — ح$ يكون مرفوعا الى أس صفر ومن ثمة لا يمكن تخليص المضروب المشترك من كميتى الكسر المفروض واسقاطه منهما

ولنفرض لعمومية هذه الطريقة أن

$$\frac{ءس}{ءس} = \frac{ع (س — ح)^{ء} + ك (س — ح)^{ب} + ل (س — ح)^{و} + ... الخ}{عَ (س — ح)^{ءَ} + كَ (س — ح)^{بَ} + لَ (س — ح)^{وَ} + ... الخ}$$

وان كميات ء و ب و و ... الخ و ءَ و بَ و وَ ... الخ موجبة ومتزايدة فهذا الكسر يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بوضع $س = ح$ ويمكننا ان نغير كمية $س$ بكمية $ح + هـ$ عوضا عن تغييرها بكمية $ح$ فقط لكن

بعد انتهاء العملية نفرض هـ = ٠ والناتج الحادث يكون كالناتج من تغيير س بكمية ح من اول وهلة ونجد حينئذ

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ح}\,\text{هـ}^{\text{ء}} + \text{ك}\,\text{هـ}^{\text{ب}} + \text{ل}\,\text{هـ}^{\text{و}} + \cdots \text{الخ}}{\text{ح}'\,\text{هـ}^{\text{ء}'} + \text{ك}'\,\text{هـ}^{\text{ب}'} + \text{ل}'\,\text{هـ}^{\text{و}'} + \cdots \text{الخ}} \quad \cdots (٤٥)$$

وباعتبار كون ء و ء' يكونان اصغر الأسس الداخلة في هاتين المتسلسلتين يمكن وقوع هذه الثلاث حالات

$$\text{ء} > \text{ء}' \quad \text{و} \quad \text{ء} = \text{ء}' \quad \text{و} \quad \text{ء} < \text{ء}'$$

ففي الحالة الاولى اذا قسمت كينا كسر (٤٥) على $\text{هـ}^{\text{ء}'}$ يحدث

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ح}\,\text{هـ}^{\text{ء}-\text{ء}'} + \text{ك}\,\text{هـ}^{\text{ب}-\text{ء}'} + \text{ل}\,\text{هـ}^{\text{و}-\text{ء}'} \cdots \text{الخ}}{\text{ح}' + \text{ك}'\,\text{هـ}^{\text{ب}'-\text{ء}'} + \text{ل}'\,\text{هـ}^{\text{و}'-\text{ء}'} + \cdots \text{الخ}} \cdots\cdots (٤٦)$$

وحيث ان ء > ء' فرضا فعدد ء − ء' يكون موجبا ومن باب اولى تكون كميات ب − ء' و و − ء' ... الخ و ب' − ء' و و' − ء' ... الخ موجبة كذلك لان ء و ب و و ... الخ و ء' و هـ' و و' ... الخ متزايدة واذا جعلنا الآن هـ = ٠ انحذفت جميع حدود الطرف الثاني لمعادلة (٤٦) ماعدا ح' ويعلم من ذلك ان هـذه المعادلة تؤول الى

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٠}{\text{ح}'} = ٠$$

وفي الحالة الثانية وهي التي يكون فيها ء = ء' يؤول حد $\text{ح}\,\text{هـ}^{\text{ء}-\text{ء}'}$ الى $\text{ح}\,\text{هـ}^{٠} = \text{ح}$ ويعلم من ذلك انه حين يجعل س = ح تؤول معادلة (٤٦) الى $\frac{\text{ح}}{\text{ح}'}$

وفي الحالة الثالثة وهي التي فيها ء < ء' تقسم كينا كسر (٤٥) على

$\text{هـ}^{\text{ء}}$

$هـ^{ى}$ فيوجد

$$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ح + ك هـ^{ب-ى} + ل هـ^{و-ى} + \cdots الخ}{حَ هـ^{ىَ-ى} + كَ هـ^{بَ-ى} + لَ هـ^{وَ-ى} + الخ}$$

ويشاهد أن فرضية $هـ = ٠$ تجعل هذه المعادلة آيلة الى

$$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ح}{٠} = \infty$$

* ٨٦ * ولنأخذ هذا الكسر $\frac{(س^{٢} - ٣ د س + ٢ د^{٢})^{\frac{٢}{٣}}}{(س^{٢} - د^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$ الذى يؤول الى $\frac{٠}{٠}$ بجعل $س = د$ مثلا فنضع $د + هـ$ محل $س$ فيه فيتحول الى

$$\frac{(هـ^{٢} - د هـ)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ د^{٢} هـ + ٣ د هـ^{٢} + هـ^{٣})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{هـ^{\frac{٢}{٣}} (هـ - د)^{\frac{٢}{٣}}}{هـ^{\frac{١}{٢}} (٣ د^{٢} + ٣ د هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$$

$$= \frac{هـ^{\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢}} (هـ - د)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ د^{٢} + ٣ د هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = \frac{هـ^{\frac{١}{٦}} (هـ - د)^{\frac{٢}{٣}}}{(٣ د^{٢} + ٣ د هـ + هـ^{٢})^{\frac{١}{٢}}}$$

ثم نجعل $هـ = ٠$ فيوجد

$$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{٠}{(٣ د^{٢})^{\frac{١}{٢}}} = ٠$$

* ٨٧ * اذا جعل أحد مقادير $س$ كميتى كسر $\frac{ى ص}{ى س}$ غير محدودتين تقسم هاتان الكميتان على $ى ص \times ى س$ فيؤول هذا الكسر الى

$$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{\frac{١}{ى س}}{\frac{١}{ى ص}} = \frac{٠}{٠}$$

ثم تجرى عليه العمليات اللازمة لمعرفة مقداره الحقيقى حيث انه قد آل الى $\frac{\cdot}{\cdot}$

٨٨ وبالجملة متى جعل فرض $س = ٠$ احد مضروبى حاصل ضرب $م ى$ آيلا الى صفر وجعل المضروب الآخر غير منته واريد معرفة المقدار الحقيقى لهذا الحاصل يحوّل الحاصل المذكور الى صورة كسر بالكيفية الآتية وهى ان يفرض اولا أن حاصل الضرب المفروض يكون $م \times ى$ وان مضروب $م$ هو الذى يصير صفرا بفرض $س = ٠$ ومضروب $ى$ يصير غير منته ثم يوضع هذا الحاصل هكذا

$$م \times ى = \frac{م}{\frac{١}{ى}}$$

ولما كان فرض $س = ٠$ يجعل مضروب $ى$ غير منته لزم ان يكون $\frac{١}{ى} = ٠$ ويؤول حاصل الضرب السابق حينئذ الى $\frac{\cdot}{\cdot}$ فتجرى عليه العملية السابقة

(فى النهايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغير واحد)

٨٩ يمكن اعطاء كمية $هـ$ فى متسلسلة تيلور مقدارا بحيث يصير اى حد يراد من حدودها اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه ولبيان ذلك نكتب المتسلسلة وهى

$$ص + \frac{وص}{وس} هـ + \frac{و^٢ص}{وس^٢} \frac{هـ^٢}{٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣} \frac{هـ^٣}{٢\times٣} + \text{الخ}$$

ونقول اذا اردنا ان يكون حد $\frac{وص}{وس} هـ$ مثلا اكبر من حاصل جمع الحدود التى تليه نضع جزء المتسلسلة المقدم من ابتداء هذا الحد هكذا

$$\left(\frac{وص}{وس} + \frac{و^٢ص}{وس^٢} \frac{هـ}{٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣} \frac{هـ^٢}{٢\times٣} + \text{الخ}\right) هـ \quad \cdots (٤٧)$$

لكنه بفرض $هـ = ٠$ ينعدم جزء $\frac{و^٢ص}{وس^٢} \frac{هـ}{٢} + \frac{و^٣ص}{وس^٣} \frac{هـ^٢}{٢\times٣} + \text{الخ}$

فمن ثمة يمكن اخذ كمية $هـ$ صغيرة جدا باقترابها من صفر ليصير هذا الجزء صغيرا

بحسب

بحسب الارادة ويعلم من ذلك انه يمكن اعطاء كمية هـ مقدارا بحيث يكون ذلك الجزء اصغر من كمية $\frac{وا صـ}{وا سـ}$ التي ليست محتوية على هـ ولتكن ع

ومن المايؤول اليه حاصل جمع $\frac{وا^{٢} صـ}{وا سـ^{٢}} \frac{هـ}{٢} + \frac{وا^{٣} صـ}{وا سـ^{٣}} \frac{هـ^{٢}}{٢ \times ٣} +$ الخ

فى هذه الحالة فتؤول متسلسلة (٤٧) الى

$$\left(\frac{وا صـ}{وا سـ} + ع\right) هـ$$ وحيث انه يوجد

$$\frac{وا صـ}{وا سـ} > ع$$ فبضرب الطرفين فى هـ يحدث

$$\frac{وا صـ}{وا سـ} هـ > ع هـ$$ او

$$\frac{وا صـ}{وا سـ} هـ > \left(\frac{وا^{٢} صـ}{وا سـ^{٢}} \frac{هـ}{٢} + \frac{وا^{٣} صـ}{وا سـ^{٣}} \frac{هـ^{٢}}{٢ \times ٣} + الخ\right) هـ$$ او

$$\frac{وا صـ}{وا سـ} هـ > \frac{وا^{٢} صـ}{وا سـ^{٢}} \frac{هـ^{٢}}{٢} + \frac{وا^{٣} صـ}{وا سـ^{٣}} \frac{هـ^{٣}}{٢ \times ٣} + الخ$$

وهذا ما اردنا اثباته وبمثله يبرهن على اى حد بالنسبة لجميع ما يليه

* ٩٠ * لتكن صـ = د سـ معادلة بمتغيرين فيمكن دائما اعتبار هذه المعادلة كمعادلة منحن رأسياته هى المقادير المختلفة للدالة صـ ويقال ان دالة صـ هذه فى نهايتها الصغرى متى مالت للزيادة بعد تناقصها شيأ فشيأ ومثاله منحنى م ب ـــ (شكل ٩) الذى معادلته $صـ^{٢} = ح + د سـ^{٢}$ فانه يشاهد ان رأسياته التى هى م ح و م َ ح َ ... الخ تأخذ فى النقصان الى نقطة ب ومن ابتداء هذه النقطة تأخذ الرأسيات ك ك و ك َ ك َ ... الخ فى الزيادة وعلى هذا يكون الرأسى ا ب هو النهاية الصغرى للدالة صـ

* ٩١ * ويقال ايضا ان الدالة ص أتت الى نهايتها الكبرى متى انتهت بعد تزايدها الى نقطة تأخذ فى النقص من ابتدائها ويكفيك (شكل ١٠) مثالا اذ رأسيات منحنى حدو الذى معادلته ص = هـ ــ دس٢ المنتسب له تأخذ فى النقص من ابتداء نقطة د من الجانبين فرأسى اد فيه هو النهاية الكبرى لدالة ص

* ٩٢ * وهناك منحنيات ليس لها الا نهاية كبرى فقط ومنحنيات ليس لها الا نهاية صغرى ومنحنيات فيها النهايتان ومنحنيات ليس لها نهايات بالكلية فان منحنى م ب (شكل ٩) الذى معادلته ص = ح + دس٢ لا توجد له نهاية كبرى لانه يعلم من بعد معادلته ان رأسياته تأخذ فى التزايد ابدا

ودائرة حـد (شكل ١١) التى معادلتها
نق٢ = (ص ــ هـ)٢ + (س ــ و)٢ توجد لها النهايتان الكبرى والصغرى متحدتين فى افق اع واكبر هاتين النهايتين دع واصغرهما ـع

* ٩٣ * متى توجد نهاية كبرى اوصغرى للدالة ص التى بتغير واحد رمزه س فتتعين هذه النهاية اذا علم الافق الموافق لها لانه اذا علم مقدار س الموافق لنهاية كبرى او صغرى للمنحنى المستدل عليه بمعادلة ص = دس وكان ذلك المقدار ح مثلا يكفى ان تجعل س = ح فى معادلة ص = دس ليكون مقدار ص الحادث منها هو النهاية الكبرى او الصغرى المطلوبة

* ٩٤ * وليكن ص = دس رأسى هو مح (شكل ١٢) ويكون فى نهايته الكبرى فاذا اخذ أفق اح زيادة هـ المتبينة بخط ح حَ وقطع ح حُ = هـ ايضا فالشروط الواقعة ليكون حم نهاية كبرى تكون

$$\text{حَ مَ} < \text{حم} \quad \text{و} \quad \text{حُ مُ} < \text{حم} \quad \text{أو}$$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) < \text{د}\,\text{س} \quad , \quad \text{د}(\text{س}-\text{هـ}) < \text{د}\,\text{س}$$

وبالعكس اذا كان حم (شكل ١٣) نهاية صغرى وكان س هو الافقى اح الموافق لهذه النهاية وقطع حَ = حً = هـ فشروط كون حم نهاية صغرى تكون

$$\text{حَ مَ} > \text{حم} \quad , \quad \text{حً مً} > \text{حم} \quad \text{او}$$

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) > \text{د}\,\text{س} \quad , \quad \text{د}(\text{س}-\text{هـ}) > \text{د}\,\text{س}$$

ويعلم من ذلك انه متى تكون الدالتان د(س+هـ) , د(س−هـ) معا اصغر من د س يوجد للمنحنى نهاية كبرى ومتى يكونان معا اكبر منها يوجد للمنحنى نهاية صغرى واذا كانت احدى هاتين الدالتين اكبر والاخرى اصغر من د س فلا توجد نهاية كبرى ولا صغرى

* ٩٥ * ولنبحث عن هذه الشروط فى اى الحالات تقع فنقول من المعلوم انه يوجد من قضية تيلور

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{ص} + \frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}\text{هـ} + \frac{\text{وا}^{2}\text{ص}}{\text{وا س}^{2}}\frac{\text{هـ}^{2}}{2} + \frac{\text{وا}^{3}\text{ص}}{\text{وا س}^{3}}\frac{\text{هـ}^{3}}{2\times 3} + \text{الخ} \cdots (48)$$

وبتغيير + هـ بكمية − هـ فى هذا الدستور يحدث

$$\text{د}(\text{س}-\text{هـ}) = \text{ص} - \frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}\text{هـ} + \frac{\text{وا}^{2}\text{ص}}{\text{وا س}^{2}}\frac{\text{هـ}^{2}}{2} - \frac{\text{وا}^{3}\text{ص}}{\text{وا س}^{3}}\frac{\text{هـ}^{3}}{2\times 3} + \text{الخ} \cdots (49)$$

ولاجل ان تكون ص = د س نهاية كبرى او صغرى يلزم ان يكون هذان الحلان معا اصغر او اكبر من ص كما فى البند المتقدم لكن لا يقع ذلك الا اذا كان $\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}$ يساوى صفرا لانه اذا لم يكن $\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}} = 0$ امكن ان يعطى الى كمية هـ مقدار بحيث يكون $\frac{\text{وا ص}}{\text{وا س}}$ هـ اكبر من حاصل الجمع الجبرى للحدود التى تليه فى كل من المتسلسلتين وبهذا تكون اشارة

حدّ $\frac{وا صہ}{وا سہ}$ هـ وحده كاشارة الناتج من ارتباطه بجميع الحدود التى تليه فاذا كان هذا الحدّ موجبا فى احد حلى (٤٨) و (٤٩) فذلك الحل يكون اكبر من صہ ويكون اصغر من صہ اذا كان الحدّ المذكور وهو $\frac{وا صہ}{وا سہ}$ هـ سلبيا وحيث ان اشارة حدّ $\frac{وا صہ}{وا سہ}$ هـ متعاكسة فى هذين الحلين يعنى موجبة فى احدهما وسالبة فى الآخر فينتج من ذلك انه لابدّ وان تكون احدى كميتى $د(سہ+هـ)$ و $د(سہ-هـ)$ اكبر من $د سہ$ والاخرى اصغر

وقد ظهر من هذا انه اذا لم يكن $\frac{وا صہ}{وا سہ}$ صفرا فلا توجد نهاية كبرى ولا صغرى اما اذا كان $\frac{وا صہ}{وا سہ} = ٠$ فان حلى (٤٨) و (٤٩) يؤولان حينئذ الى

$$د(سہ+هـ)=صہ+\frac{وا^{٢}صہ}{وا سہ^{٢}}\frac{هـ^{٢}}{٢}+\frac{وا^{٣}صہ}{وا سہ^{٣}}\frac{هـ^{٣}}{٢\times٣}+\cdots\text{الخ}$$

$$د(سہ-هـ)=صہ+\frac{وا^{٢}صہ}{وا سہ^{٢}}\frac{هـ^{٢}}{٢}-\frac{وا^{٣}صہ}{وا سہ^{٣}}\frac{هـ^{٣}}{٢\times٣}+\cdots\text{الخ}$$

واشارة الحدود التى تلى صہ تتعلق فى هذه الحالة باشارة $\frac{وا^{٢}صہ}{وا سہ^{٢}}$ اذا اخذت كمية هـ مقدارا صغيرا كافيا لان يكون $\frac{وا^{٢}صہ}{وا سہ^{٢}}$ هـ اكبر من حاصل الجمع الجبرى للحدود الآتية بعده وحيث ان اشارة $\frac{وا^{٢}صہ}{وا سہ^{٢}}$ متحدة فى الحلين فاذا كانت هذه الاشارة هى الزائد فدالتا $(سہ+هـ)$ و $(سہ-هـ)$

تكونان

تكونان اكبر من $ك_{س}$ وتكون $ك_{س}$ فى هذه الحالة نهاية صغرى وكذا اذا كان $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ سالبا شوهد أن $ك_{س}$ تكون نهاية كبرى

* ٩٦ * ولتتميم هذه القضية ننبه انه قد يكون $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ صفرا مع وجود $\frac{وص}{وس} = ٠$

وفى هذه الحالة لا توجد نهاية كبرى ولا صغرى الا اذا كان $\frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}} = ٠$ ايضا لان اشارة الحدود التى تلى ص تكون عند ذلك متعلقة باشارة $\frac{و^{٤}ص}{وس^{٤}}$ حين تؤخذ هـ صغيرة جدا ويثبت انه اذا كان $\frac{و^{٤}ص}{وس^{٤}}$ موجبا تكون $ك_{س}$ نهاية صغرى واذا كان سلبيا تكون نهاية كبرى وهلم جرا

وعلى العموم متى يكون المكرر التفاضلى الاول الذى لم يحذف بدرجة مزدوجة فانه يوجد نهاية صغرى اذا كان موجبا ونهاية كبرى اذا كان سالبا

(المثال الاول)

* ٩٧ * لمعرفة نهايات هذه الدالة $ح - ءس + س^{٢}$ نضع اولا $ص = ح - ءس + س^{٢}$

ثم ناخذ التفاضل ونقسم على وس فيحدث

$$\frac{وص}{وس} = - ء + ٢س\ و$$

$$\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = ٢$$

وبايجاب مقدار $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ يستدل على انه يوجد للدالة المفروضة نهاية صغرى

ولتعيين الافق الموافق لهذه النهاية نساوى مقدار $\frac{وا ص}{وا س}$ بصفر فيحدث منه $س = \frac{ى}{٢}$ واذا وضع هذا المقدار فى مقدار ص بدلا عن س حدث $ص = ح - \frac{ى^٢}{٤}$ وهذا المقدار هو مقدار النهاية الصغرى المطلوبة

(المثال الثانى)

* ٩٨ * لتكن $ح^٤ + ى^٣ س - هـ^٢ س^٢$ كمية يراد معرفة نهايتها فنضع

$ص = ح^٤ + ى^٣ س - هـ^٢ س^٢$ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على $وا س$ فنجد

$$\frac{وا ص}{وا س} = ى^٣ - ٢ هـ^٢ س \quad و \quad \frac{وا^٢ ص}{وا س^٢} = - ٢ هـ^٢$$

وحيث ان $\frac{وا^٢ ص}{وا س^٢}$ سالب فيوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى يستخرج الافق الموافق لها من معادلة $ى^٣ - ٢ هـ^٢ س = ٠$ فيوجد $س = \frac{ى^٣}{٢ هـ^٢}$ وبوضع هذا المقدار فى مقدار ص بدلا عن س يوجد $ص = ح^٤ + \frac{ى^٦}{٤ هـ^٢}$ وهو مقدار النهاية الكبرى المراد ايجادها

(المثال الثالث)

* ٩٩ * لتكن ايضا معادلة $ص = ٣ ح^٢ س^٣ - ى^٤ س + هـ^٥$ فنأخذ التفاضل ونقسم على $وا س$ فنجد كما تقدم

$$\frac{وا ص}{وا س} = ٩ ح^٢ س^٢ - ى^٤ \quad و \quad \frac{وا^٢ ص}{وا س^٢} = ١٨ ح^٢ س$$

ثم نساوى مقدار المكرر التفاضلى $\frac{وا ص}{وا س}$ بصفر فيوجد

$ ٩ ح^٢ س^٢ - ى^٤ = ٠ $ ومنه يستخرج

$$س = \pm \frac{ى^٢}{٣ ح}$$

واذا

واذا وضعنا مقداري س في مقدار $\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢}$ على التوالى بدلا عن س يوجد $\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢} = +٦\,\text{ح}\,\text{د}^٢$ و $\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢} = -٦\,\text{ح}\,\text{د}^٢$

وبهذا يستدل على انه يوجد للدالة المفروضة نهاية صغرى موافقة الى افق $\text{س} = +\frac{\text{د}^٢}{٣\text{ح}}$ ونهاية كبرى موافقة الى افق $\text{س} = -\frac{\text{د}^٢}{٣\text{ح}}$

وبوضع هذه المقادير في مقدار ص يوجد اولا $\text{ص} = \text{هـ}^٥ - \frac{٢\text{د}^٦}{٩\text{ح}}$ وهو مقدار النهاية الصغرى ويوجد ثانيا $\text{ص} = \text{هـ}^٥ + \frac{٢\text{د}^٦}{٩\text{ح}}$ وهو مقدار النهاية الكبرى

(تطبيق نظر النهايات على حل جملة اسئلة)

(المسئلة الاولى)

* ١٠٠ * لنا ان نقسم عددا مفروضا الى قسمين بشرط ان يكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن

ولاجل ذلك نفرض العدد ح واحد القسمين المطلوبين س فالقسم الآخر يكون ح − س وكمية س(ح − س) تكون هي الكمية التي يراد معرفة نهايتها الكبرى فنضع

$\text{ص} = \text{س}(\text{ح} - \text{س})$ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على وس فيوجد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ح} - ٢\text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢} = -٢.$$

وحيث ان $\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢}$ سالب فيتحقق انه يوجد نهاية كبرى بخلاف ما اذا كان هذا المقدار موجبا فان المسئلة تكون غير ممكنة ثم انه بمساواة مقدار $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ بصفر يحدث منه $\text{س} = \frac{\text{ح}}{٢}$ ويعلم من ذلك انه يجب قسمة العدد المفروض قسمين متساويين ليكون حاصل ضربهما اعظم ما يمكن او نهاية كبرى

(المسئلة الثانية)

* ١٠١ * لنا ان نعين اعظم الاسطوانات الممكن رسمها داخل مخروط قائم

ولذلك نرمز لخط ع و الذى هو ارتفاع المخروط (شكل ١٤) بحرف ح ونرمز بحرف ء لخط او الذى هو نصف قطر القاعدة ثم نرمز بحرف س لخط ع ءَ الذى هو بعد رأس المخروط عن مركز الدائرة العليا للاسطوانة فيحدث لنا من تشابه مثلثى ع او و ع هـ ءَ هذه المناسبة

$$ع و : ا و :: ع ءَ : هـ ءَ \quad \text{أو}$$

$$ح : ء :: س : هـ ءَ \quad \text{ومنها يحدث}$$

$$هـ ءَ = \frac{ء س}{ح}$$

ولنفرض ان ط تكون نسبة القطر الى محيطه فمساحة دائرة هـ ع ف التى نصف قطرها يساوى $\frac{ء س}{ح}$ تكون $\frac{ط ء^٢ س^٢}{ح^٢}$ وبضرب هذه المساحة فى ارتفاع الاسطوانة الذى هو ح ــ س يحدث حجم تلك الاسطوانة ويكون ذلك الحجم $\frac{ط ء^٢ س^٢}{ح^٢}$ (ح ــ س) وهذه الكمية تكون هى التى يراد ايجاد نهايتها الكبرى فنساويها بحرف ص ليحدث

$$ص = \frac{ط ء^٢ س^٢}{ح^٢} (ح ــ س)$$ ثم نأخذ التفاضل ونقسم على و س فيوجد

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{ط ء^٢}{ح^٢} (٢ ح س ــ ٣ س^٢) \quad \text{و}$$

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \frac{ط ء^٢}{ح^٢} (٢ ح ــ ٦ س)$$

وبمساواة مقدار $\frac{و ص}{و س}$ بصفر يوجد

$$\frac{ط ء^٢}{ح^٢} (٢ ح س ــ ٣ س^٢) = ٠ \quad \text{او}$$

$٢ ح س - ٣ س^٢ = ٠$ ومنها يستخرج

$س = ٠$ و $س = \frac{٢ح}{٣}$

فقدار $س = ٠$ لا يوافق نهاية كبرى لان $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ يؤول به الى

$\frac{٢ ط ى^٢}{ح}$ وهو عدد موجب فيوافق حينئذ الى نهاية صغرى وبالحقيقة متى يفرض $س = ٠$ تؤول الاسطوانة الى محور المخروط (فانه كلما ارتفعت الاسطوانة قل ثخن حجمها) ومقدار $س = \frac{٢ح}{٣}$ يكون هو الموافق للمسئلة وحده لان مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ يؤول به الى $\frac{-٢ ط ى^٢}{ح}$ وهو عدد سالب فاذا طرح $ع ى' = س = \frac{٢}{٣} ع و$ من ارتفاع المخروط بقى $و ى' = \frac{١}{٣} ع و$ ويعلم من ذلك ان حجم الاسطوانات الممكن رسمها داخل مخروط قائم ما كان ارتفاعها ثلث ارتفاع ذلك المخروط

(المسئلة الثالثة)

* ١٠٢ * لنا ان نقسم مستقيم اب (شكل ١٥) الى قسمين اح و حب بشرط ان يكون حاصل ضرب $اح \times حب^٣$ نهاية كبرى ولذلك نرمز بحرف ح لخط اب الكلي و بحرف س لقسم حب فالمعادلة التي ينتهي اليها اليؤخذ تفاضلها تكون

$ص = س^٢ (ح - س)$ ثم يوجد باخذ التفاضل والقسمة على $و س$

$$\frac{و ص}{و س} = ٣ ح س^٢ - ٤ س^٣$$ و

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٦ ح س - ١٢ س^٢$$

وبمساواة مقدار $\frac{و ص}{و س}$ بصفر يستخرج منه $س^٢ = ٠$ او $س^٢ = \frac{٣ح}{٤}$

والمقدار الثاني لمجهول $س$ هو الذي يوافق المسئلة فقط لان مقدار $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ يؤول به الى ناتج سالب وهو $-\frac{٩ح^٢}{٤}$

* ١٠٣ * ولينتبه انه متى يوجد مضروب ثابت موجب فى مقدار مكرر $\frac{وص}{وس}$ التفاضلى يمكن اسقاط هذا المضروب لانه اذا وجدنا $\frac{وص}{وس} = ح د س$ استخرجنا منه $\frac{و^٢ص}{وس^٢} = ح \frac{و.دس}{وس}$ وحيث كانت هذه المعادلة الاخيرة لا تفيدنا الا بيان اشارة مقدار $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ وهذه الاشارة لا تتعلق الا باشارة $\frac{و.دس}{وس}$ لان $ح$ مضروب ثابت موجب يعلم من ذلك انه يمكن اسقاط مضروب $ح$ من هذه المعادلة وكذا يمكن اسقاطه من معادلة $\frac{وص}{وس} = ح د س$ لانه حيث كان اللازم مساواة الطرف الثانى لهذه المعادلة بصفر ليستخرج منها $س$ فمعادلة $ح د س = ٠$ تحدث $د س = ٠$ وينتج من ذلك انه يمكن اسقاط الثابتة

(المسئلة الرابعة)

* ١٠٤ * المراد تعيين الاناء الاسطوانى الذى يسع كمية معلومة الحجم من الماء ويكون سطحه الداخلى اصغر ما يمكن ولذلك نرمز لحجم الماء المعلوم بحرف $ح$ ولنصف قطر قاعدة الاسطوانة بحرف $س$ فكمية $ط س^٢$ تكون هى مساحة قاعدة هذه الاسطوانة وحيث انه بضرب الارتفاع فى مساحة القاعدة يحدث حجم الاسطوانة يوجد

ارتفاع الاسطوانة $\times$ $ط س^٢ = ح$ ومنه يستخرج

ارتفاع الاسطوانة $= \frac{ح}{ط س^٢}$

وبضرب

وبضرب هذا الارتفاع في محيط القاعدة الذي هو ٢ط س يوجد

$$\frac{ح}{ط س^{٢}} \times ٢ط س = \frac{٢ح}{س}$$

وهذا الحاصل يبين مساحة السطح المحدب للاسطوانة فاذا اضيف عليه كمية $ط س^{٢}$ التي هي مساحة قاعدة تلك الاسطوانة يحدث

$\frac{٢ح}{س} + ط س^{٢}$ وهذه الكمية تكون هي التي يراد معرفة نهايتها الصغرى.

فنضع لاجل ذلك

$ص = \frac{٢ح}{س} + ط س^{٢}$ فيحدث منه

$$\frac{وص}{وس} = - \frac{٢ح}{س^{٢}} + ٢ط س \quad و$$

$$\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = \frac{٤ح}{س^{٣}} + ٢ط$$

ثم نساوي مقدار $\frac{وص}{وس}$ بصفر فيحدث منه

$$س = \sqrt[٣]{\frac{ح}{ط}}$$

وحيث ان هذا المقدار يوافق لنهاية صغرى لانه يجعل $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ موجبا يعلم من ذلك ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المطلوبة يساوي $\sqrt[٣]{\frac{ح}{ط}}$ واذا وضع هذا المقدار في الكمية المبينة مقدار الارتفاع يوجد

$$ارتفاع\ الاسطوانة = \frac{ح}{\frac{ط ح^{\frac{٢}{٣}}}{ط^{\frac{٢}{٣}}}} = \frac{ح^{\frac{١}{٣}}}{ط^{\frac{١}{٣}}} = \sqrt[٣]{\frac{ح}{ط}}$$

ويجري هذه المسئلة في عمل المدافع لانه يقال

المعلوم مقدار من البارود والمراد معرفة الاتساع اللازم لهاون ذى خزنة اسطوانية يكون فعل قوة البارود على حائط هذه الخزنة اصغر ما يكون ويتظر ان هذه المسئلة تؤول الى تعيين اصغر السطوح التى تأخذها الخزنة

وبالنظر الى ما سبق يعلم انه ينبغى ان يكون نصف قطر قاعدتها مساويا الى ارتفاعها

(المسئلة الخامسة)

* ١٠٥ * نريد أن نرسم مخروطا داخل كرة بشرط ان يكون سطحه المحدب اكبر ما يكون بالنسبة للمخاريط الممكن رسمها داخل هذه الكرة ولذلك نفرض ان نصف دائرة امب (شكل ١٦) تدور حول محور اب فيحدث وتر ام فى هذه الدورة مخروطا ارتفاعه اح ونصف قطر قاعدته مح ومساحة السطح المحدب لهذا المخروط تكون مساوية الى

$$\text{محيط حم} \times \tfrac{1}{2}\text{ام} = 2\,\text{ط حم} \times \tfrac{1}{2}\text{ام} = \text{ط حم} \times \text{ام}$$

فنريد الآن تعيين حم و ام ولذلك نفرض ان اب $=$ ٢ر و اح $=$ س فيحدث من توسط حم فى التناسب بين اح و بح هذه المناسبة

$$\text{س} : \text{مح} :: \text{مح} : 2\text{ر} - \text{س}$$ ومنها يحدث

$$\text{مح} = \sqrt{2\text{رس} - \text{س}^2}$$

وكذا من توسط ام فى النسبة بين اح و اب يوجد

$$\text{س} : \text{ام} :: \text{ام} : 2\text{ر}$$ ويحدث من ذلك

$$\text{ام} = \sqrt{2\text{رس}}$$

وبوضع هذه المقادير عوضا عن مح و ام فى الكمية التى تبين السطح المحدب للمخروط يوجد

$$\text{السطح المحدب للمخروط} = \text{ط}\sqrt{2\text{رس} - \text{س}^2}\sqrt{2\text{رس}} = \text{ط}\sqrt{4\text{ر}^2\text{س}^2 - 2\text{رس}^3}$$

وبالرمز بحرف ص لهذه الكمية يكون

$$\text{ص} = \text{ط}\sqrt{4\text{ر}^2\text{س}^2 - 2\text{رس}^3}$$

ثم يجرى التفاضل بناء على (بند ١٠٣) فيكون

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{٤ ح^{٢} س - ٣ ح س^{٢}}{\sqrt{٤ ح^{٢} س^{٢} - ٢ ح س^{٣}}}$$ وباسقاط مضروب س المشترك

يكون

$$\frac{و ص}{و س} = \frac{٤ ح^{٢} - ٣ ح س}{\sqrt{٤ ح^{٢} - ٢ ح س}} \quad \ldots\ldots \quad (٥٠)$$

ولاجل ان يكون هذا المقدار مساويا الى صفر يوضع

$٤ ح^{٢} - ٣ ح س = ٠$ فيستخرج منه

$$س = \frac{٤ ح}{٣}$$

وهذا المقدار يوافق نهاية كبرى لانه يجعل $\frac{و^{٢} ص}{و س^{٢}}$ سالبا

* ١٠٦ * وقبل البحث عن تعيين مقدار $\frac{و^{٢} ص}{و س^{٢}}$ نشرح طريقة يختصر بها الحساب فى بعض الحالات وليتأمل اولا انه اذا الت دالة لكمية س الى صفر بمقدار أخذه متغير س فلا يلزم منه ان يكون مكررها التفاضلى صفرا ايضا فان المكرر التفاضلى $٢ س - ٥$ للدالة $س^{٢} - ٥ س + ٦$ التى تؤول الى صفر بفرض $س = ٢$ أو $س = ٣$ لايؤول الى صفر بهذه الفروضات

* ١٠٧ * قد يمكن فى بعض الاوقات اختصار العمليات المستعملة لمعرفة هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى اونهاية صغرى لأننا اذا فرضنا انه يراد تعيين المكرر التفاضلى لمعادلة $\frac{و ص}{و س} = ش_{١} \times سَ_{١}$ التى فيها $ش_{١}$ و $سَ_{١}$ دوال لمتغير س واحداهما وهى $ش_{١}$ تؤول الى صفر ببعض المقادير التى ياخذها متغير س وأخذنا تفاضل هذه المعادلة كما فى

(بند ١٤) وقسمنا على وس يوجد

$$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = \frac{\text{س}'_1\,\text{وس}'_1}{\text{وس}} + \frac{\text{س}''_1\,\text{وس}_1}{\text{وس}}$$

وحيث ان س_1 تؤول الى صفر بالمقدار الذى تأخذه كمية س فتؤول

تلك المعادلة الى $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = \frac{\text{س}'_1\,\text{وس}'_1}{\text{وس}}$ ويفهم من ذلك انه لايجاد

$\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ يلزم ضرب المكرر التفاضلى للمضروب الذى يصير صفرا

فى المضروب الآخر [وهذه القاعدة ليست خالية عن العوارض فان $\frac{\text{وس}_1}{\text{وس}}$

قد يكون صفرا ايضا ومثاله معادلة $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{س}^2\,(\text{س} - \text{ح})^2$ التى

تحتوى على جذور متساوية فان حدى مقدار $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ فيها يصيران اصفارا

ويجب البحث عن المكررات التفاضلية التى بدرجة عليا حينئذ عوضا عن

اسقاط المضروب المتبين برمز س_1 $\frac{\text{وس}'_1}{\text{وس}}$ كما فى (بند ٩٦) ليعرف

هل يوجد للدالة المفروضة نهاية كبرى او نهاية صغرى واذا صار $\frac{\text{وس}'_1}{\text{وس}}$

غير محدود فقد آل الامر الى حالة (بند ٨٧)]

* ١٠٨ * واذا أردنا مثلا معرفة المكرر التفاضلى بدرجة ثانية الى

$\frac{\text{وس}}{\text{وس}} = \frac{\text{س} - \text{ح}}{\sqrt{\text{س}}}$ بفرض $\text{س} = \text{ح}$ نضع المعادلة اولا هكذا

$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \times (\text{س} - \text{ح})$ ويوجد من بعد البند المتقدم

$$\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = \frac{١}{\sqrt{س}} \times \frac{و(س - ح)}{وس} = \frac{١}{\sqrt{س}}$$

* ١٠٩ * نعود الآن الى معادلة (٥٠) التى يراد استخراج $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ منها فى حالة فرضية $س = \frac{٤ح}{٣}$ فصل البسط فيها الى مضروبيه فيوجد

$$\frac{وص}{وس} = \frac{حس(٤ح - ٣س)}{\sqrt{٤ح^{2}س^{2} - ٢حس^{3}}}$$ او

$$\frac{وص}{وس} = \frac{حس}{\sqrt{٤ح^{2}س^{2} - ٢حس^{3}}} \times (٤ح - ٣س)$$

ثم نقول حيث ان مضروب $(٤ح - ٣س)$ يساوى صفرا فى هذه الحالة يوجد من بعد (بند ١٠٧)

$$\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = \frac{حس}{\sqrt{٤ح^{2}س^{2} - ٢حس^{3}}} \times \frac{و(٤ح - ٣س)}{وس}$$

$$= - \frac{٣حس}{\sqrt{٤ح^{2}س^{2} - ٢حس^{3}}}$$

واذا قسم بسط ومقام هذا الكسر الاخير على $س$ يحدث

$$\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = - \frac{٣ح}{\sqrt{٤ح^{2} - ٢حس}}$$ ثم يحدث بوضع مقدار $س$ الذى هو $\frac{٤ح}{٣}$ عوضا عنه

$$\frac{و^{2}ص}{وس^{2}} = - \frac{٣ح}{\sqrt{٤ح^{2} - \frac{٨ح^{2}}{٣}}} = - \frac{٣ح}{\sqrt{\frac{٤ح^{2}}{٣}}}$$

وحيث ان هذا المقدار سالب فيوافق مقدار $س$ الى نهاية كبرى

(المسئلة السادسة)

* ١١٠ * نريد ان نمد من نقطة مفروضة داخل زاوية قائمة خطا مستقيما يكون جزؤه المحصور بين ضلعي هذه الزاوية نهاية صغرى ولذلك نفرض ان الزاوية تكون سـاصـ (شكل ١٧) والنقطة المفروضة داخلها تكون ح ثم نفرض ان المستقيم المطلوب يكون وهـ ونرمز لبعد اب بحرف حـ ولبعد بح بحرف ء ولبعد بهـ بحرف سـ فيحدث من تشابه مثلثي بحهـ و اوهـ القائمي الزاوية هذه المناسبة

$$\text{بهـ} : \text{بح} :: \text{اهـ} : \text{او}$$ أو

$$\text{سـ} : \text{ء} :: \text{حـ} + \text{سـ} : \text{او}$$ ومنها يحدث

$$\text{او} = \frac{\text{ء}}{\text{سـ}}(\text{حـ}+\text{سـ})$$

وبتربيع الطرفين يكون

$$\overline{\text{او}}^2 = \frac{\text{ء}^2}{\text{سـ}^2}(\text{حـ}+\text{سـ})^2$$ وغير ذلك يوجد

$$\overline{\text{اهـ}}^2 = (\text{حـ}+\text{سـ})^2$$

فتوضع هذه المقادير في دستور $\text{وهـ} = \sqrt{\overline{\text{او}}^2+\overline{\text{اهـ}}^2}$ فيحدث من ذلك

$$\text{وهـ} = \sqrt{\frac{\text{ء}^2}{\text{سـ}^2}(\text{حـ}+\text{سـ})^2+(\text{حـ}+\text{سـ})^2} = \sqrt{\left(\frac{\text{ء}^2}{\text{سـ}^2}+1\right)(\text{حـ}+\text{سـ})^2}$$

وباتحاد المقام في المضروب الاول الذي تحت الجذر يوجد

$$\text{وهـ} = \sqrt{\frac{\text{ء}^2+\text{سـ}^2}{\text{سـ}^2}(\text{حـ}+\text{سـ})^2} = \frac{\text{حـ}+\text{سـ}}{\text{سـ}}\sqrt{\text{ء}^2+\text{سـ}^2} = \text{صـ}$$

وباعتبار هذه الكمية حاصل ضرب مضروب $\frac{\text{حـ}+\text{سـ}}{\text{سـ}}$ في مضروب $\sqrt{\text{ء}^2+\text{سـ}^2}$ نجري التفاضل على مقتضى (بند ١٤) فيوجد

$$\text{ق صـ} = \frac{\text{حـ}+\text{سـ}}{\text{سـ}}\,\text{ق}.\sqrt{\text{ء}^2+\text{سـ}^2} + \sqrt{\text{ء}^2+\text{سـ}^2}\,\text{ق}.\frac{\text{حـ}+\text{سـ}}{\text{سـ}}$$ او

$$\text{و}ص = \frac{(ح+س)\,س\,\text{و}س}{س\sqrt{ء^2+س^2}} + \sqrt{ء^2+س^2} \times \frac{ح\,\text{و}س}{س^2}$$

ثم نشرك المقامات بان نضرب كميتي الكسر الاول في $س$ وكميتي الكسر الثاني في $\sqrt{ء^2+س^2}$ فيحدث لنا

$$\text{و}ص = \frac{(ح+س)}{س^2}\,\frac{س^2\,\text{و}س}{\sqrt{ء^2+س^2}} + \frac{ء^2+س^2}{س^2\sqrt{ء^2+س^2}} \times -ح\,\text{و}س$$

ثم نجمع البسوط ونختصر حدودها ونقسم على $\text{و}س$ فيوجد اخيرا

$$\frac{\text{و}ص}{\text{و}س} = \frac{س^3 - ح\,ء^2}{س^2\sqrt{ء^2+س^2}}$$

وبمساواة البسط بصفر يستخرج منه

$$س = \sqrt[3]{ح\,ء^2}$$

ولاجل ان نثبت ان هذا المقدار يوافق الى نهاية صغرى يكفي ان نضع بموجب (بند ١٠٧) محل البسط الذي هو المضروب العدم مكرره التفاضلي فنجد على هذه الصورة

$$\frac{\text{و}^2ص}{\text{و}س^2} = \frac{3س^2}{س^2\sqrt{ء^2+س^2}} = \frac{3}{\sqrt{ء^2+س^2}}$$ وهو مقدار موجب

بالطبع ولم يجر وضع مقدار $س$ لان المربع $س^2$ موجب أبدا

(المسئلة السابعة)

* ١١١ * المراد معرفة اكبر المثلثات القائمة الزاوية الممكن رسمها على مستقيم مفروض معتبرا وترا لها

ولذلك نفرض ان هذا المستقيم يكون اب (شكل ١٨) ثم نرمز له بحرف $ح$ ونرمز لاحد الضلعين بحرف $س$ فالضلع الآخر يصير $\sqrt{ح^2-س^2}$ ومقدار مساحة المثلث تكون حينئذ $\frac{س}{2}\sqrt{ح^2-س^2}$ فاذا رمزنا لهذه

المساحة بحرف ص وراجعنا (بند ١٠٣) . وجدنا ان المعادلة المنتهى اليها بأخذ تفاضلها تكون هى

$ص = س \sqrt{ح^٢ - س^٢}$ أو وهو الاولى

$ص = \sqrt{ح^٢ س^٢ - س^٤}$ ومنها يستخرج

$$\frac{وص}{وس} = \frac{ح^٢ س - ٢ س^٣}{\sqrt{ح^٢ س^٢ - س^٤}}$$

وحين نساوى هذا المقدار بصفر نجد

$ح^٢ س - ٢ س^٣ = ٠$ أو

$س (ح^٢ - ٢ س^٢) = ٠$ ومنها يحدث

$س = ٠$ او $٢ س^٢ = ح^٢$

وحيث انه لايمكن ان يكون مقدار س صفرا فيستخرج ذلك المقدار من المعادلة الثانية يعنى الاخيرة فيوجد $س = \sqrt{\frac{ح^٢}{٢}}$ وبهذا المقدار يستدل على ان ضلعى اد و د ى يكونان متساويين

هذا وبأخذ تفاضل مضروب $ح^٢ - ٢ س^٢$ يوجد كما فى (بند ١٠٧) أن

$$\frac{و^٢ص}{وس^٢} = \frac{س}{\sqrt{ح^٢ س^٢ - س^٤}} \times \frac{و(ح^٢ - ٢ س^٢)}{وس} = - \frac{٤ س^٢}{\sqrt{ح^٢ س^٢ - س^٤}}$$

وبسبب سلب هذا المقدار يتحقق ان فرضية $ح^٢ - ٢ س^٢ = ٠$ تحدث لمجهول س مقدارا يوافق الى نهاية كبرى

(فى المدلول الهندسى للمكررات التفاضلية)

* ١١٢ * قد علمنا من (بند ٧١) ان $\frac{وص}{وس}$ يبين ظل الزاوية التى تقع بين الخط المماس فى نقطة (س و ص) وبين الخط الافقى وحيث كانت هذه القضية اساسا لما يراد البحث عنه فلنثبتها من اول وهلة بالوجه الآتى وهو أن نرمز الى ح م (شكل ٤) بحرف ص والى ح ح َ

بحرف

بحرف هـ ثم نرسم مك موازيا الى محور الاقفيات فيحدث لنا

$$مَ عَ = د (س + هـ) \text{ و}$$

$$مَ ك = د(س+هـ) - د س = \frac{و ص}{و س} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ^2}{1\times 2} + \text{الخ}$$

واذا وضعنا فى معادلة ظاع $= \frac{مَ ك}{م ك}$ الحادثة من التناسب

$$م ك : مَ ك :: 1 : ظاع$$

عوضا عن مَ ك و م ك ماساواهما نجد

$$ظاع = \frac{\frac{و ص}{و س} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ^2}{1\times 2} + \cdots \text{الخ}}{هـ}$$

$$= \frac{و ص}{و س} + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ}{1\times 2} + \cdots \text{الخ}$$

وحين نرتقى الى النهاية تصير هـ صفرا ويؤول طاع الى ظاط ويوجد اذن

$$ظاط = \frac{و ص}{و س}$$

هذا واذا صار ح م (شكل ١٩) نهاية كبرى صار عماس م ط موازيا الى محور الاقفيات فيجعل بينه و بين هـذا المحور زاوية قدرها صفرا وبهذا السبب يوجد $\frac{و ص}{و س} = ٠$

و بمثل ذلك يثبت انه متى كان م ح نهاية صغرى كان الظل صفرا ايضا يعنى انه يكون $\frac{و ص}{و س} = ٠$.

ويعلم من ذلك ان معادلة $\frac{و ص}{و س} = ٠$ لا تبين الا شرط توازى المماس فى نقطة م التى ابعادها س و ص الى محور الاقفيات

* ١١٣ * نبحث الآن عن الحالات التى يكون فيها $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ موجبا او سالبا

ولذلك نعتبر اولا الحالة التى يكون فيها المنحنى (شكل ٢٠) محدبا نحو محور الافقيات فنفرض ان اح = س و م ح = ص و ح حَ = حَ حً = هـ ثم نمرر قاطع م مَ ع بنقطتى م و مَ ونمد مستقيمى م ن و مَ نَ موازيين الى محور الافقيات فنجد مَ و = مَ حَ − م ح = د(س+هـ) − د س وذلك عبارة عن

$$مَ و = \frac{و ص}{و س} هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ^2}{2} + \frac{و^3 ص}{و س^3} \frac{هـ^3}{2 \times 3} + \cdots الخ$$

وحيث انه يحدث من تشابه مثلثى م مَ و و م ع ن هذه المناسبة

م و : م ن :: مَ و : ع ن أو

هـ : ٢هـ :: مَ و : ع ن التى يستخرج منها

ع ن = ٢ مَ و

فيبدل فيها مَ و بمقداره ليوجد

$$ع ن = 2 \frac{و ص}{و س} هـ + 2 \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{هـ^2}{2} + 2 \frac{و^3 ص}{و س^3} \frac{هـ^3}{2 \times 3} + \cdots الخ$$

وغير ذلك عندنا مً حً = دَ(س+٢هـ)

و نَ حً = م ح

وبطرح الثانية من الاولى يوجد

$$مً نَ = د(س+2هـ) − ص = \frac{و ص}{و س} 2هـ + \frac{و^2 ص}{و س^2} \frac{4 هـ^2}{1 \times 2} + الخ$$

ثم انك اذا اسقطت من هذا المقدار ع ن بقى لك (شكل ٢٠)

$$مً ع = \frac{و^2 ص}{و س^2} هـ^2 + الخ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (51)$$

وفى الحالة التى يكون فيها تقعير المنحنى نحو محور الافقيات (شكل ٢١) يلزم أن يطرح من مقدار ع ن مقدار مً نَ عكس ما سلف ليستخرج

مقدار

مقدار م'ع ويوجد حينئذ

$$\text{م'ع} = -\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}\ \text{هـ}^{٢} + \cdots\cdots \text{الخ}\quad(٥٢)$$

وبتقارن مقدارى م'ع المستدل عليهما بمعادلتى (٥١) و (٥٢) يشاهد أن $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ فى احدهما متبوع باشارة + وفى الآخر باشارة ــ هذا و بناء على امكان جعل اشارة الحد الاول لحل م'ع كاشارة ناتج هذا الحل بتمامه وكون المربع هـ^{٢} الذى هو موجب بالطبع لا يؤثر فى اشارة $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ هـ^{٢} يكون المكرر التفاضلى $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ حائزا وحده اشارة حاصل جمع جميع حدود مقدار م'ع وحينئذ يعلم انه اذا لم تعتبر معادلتا (٥١) و (٥٢) الا بالنسبة للاشارات المتمتعة بها اطرافهما يمكن اسقاط هـ^{٢} مع الحدود التى تلى $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ وتصير هاتان المعادلتان هكذا

$$\text{م'ع} = +\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} \quad \text{و} \quad \text{م'ع} = -\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$$

ومنهما يحدث

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} &= +\text{م'ع} \\ \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} &= -\text{م'ع} \end{aligned}\right\}\quad(٥٣)$$

واذا اعتبرت ص ككمية موجبة وقع م'ع (شكل ٢٠) فى جهة واحدة معها فيكون موجبا وتبين المعادلة الاولى من معادلتى (٥٣) حينئذ انه متى كان تحديب المنحنى متجها نحو محور الافقيات (شكل ٢٠) كان $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}}$ موجبا

واذا اعتبرنا بعد ذلك ثانية معادلتى (٥٣) مع (شكل ٢١) المتنسب لها

شاهدنا ان — م ع يبين خطا مستقيما متعاكس فى الاشارة مع ص

ويعلم من ذلك ان $\frac{d^2 y}{dx^2}$ يكون سالبا فى حالة (شكل ٢١) يعنى متى يكون تقعير المنحنى متجها نحو محور الافقيات

* ١١٤ * قد فرضنا فيما مر أن المنحنى ممتد فوق محور الافقيات والآن نبحث عما يقع حين يمتد هذا المنحنى تحت المحور المذكور كما فى (شكل ٦٧) فنقول من المحقق من بعد ماسبق انه حيث كان المنحنى محدبا نحو محور الافقيات فى نقطة م فكمية $\frac{d^2 y}{dx^2}$ أو م ن تكون موجبة لكن مستقيما م ن و م ن الموجودان فى جهة واحدة من مماس ط ط يجب أن يكونا متحدى الاشارة ومن ثمة يكون م ن موجبا كما أن م ن موجب وينتج من ذلك ان $\frac{d^2 y}{dx^2}$ فى نقطة م المقعر فيها المنحنى نحو محور الافقيات يكون مختلفا فى الاشارة مع الرأسى م ع المتبوع باشارة السلب وبالعكس فانه يكون المنحنى محدبا نحو محور الافقيات متى كان ص و $\frac{d^2 y}{dx^2}$ متحدى الاشارة واذن يمكن أن يقال فى العموم أن $\frac{d^2 y}{dx^2}$ يكون متحدا فى الاشارة مع ص متى كان المنحنى موجها تحديبه نحو محور الافقيات بوقوعه فى اى جهة كانت ويأخذ اشارة عكس اشارة ص متى كان المنحنى موجها تقعيره نحو المحور المذكور

ويعلم ان المنحنى يكون محدبا او مقعرا نحو محور الافقيات بحسب كون الرأسى آيلا الى نهايته الصغرى او نهايته الكبرى ويتضح السبب فى ان $\frac{d^2 y}{dx^2}$ موجب فى الحالة الاولى وسالب فى الثانية

* ١١٥ * ويقال ايضا انه يمكن أن توجد نهاية كبرى اونهاية صغرى متى يكون $\frac{dy}{dx} = \infty$ ولشرح مدلول هذا الشرط نفرض أن

ص

صـ = دسـ معادلة منحنى م ن (شكل ٢٢) ثم نقول من المعلوم
انه اذا اخذ متغير سـ مقدار اح انتجت هذه المعادلة الرأسى م ح
واذا حلت هذه المعادلة بعد ذلك بالنسبة الى صـ واستخرج منها
سـ = د صـ ثم جعل صـ = اح َ (وهو المقدار السابق لمتغير صـ)
انتجت المعادلة المذكورة سـ = ح َم وفى هذه الحالة تعتبر صـ
كأفقى وسـ كراسى ويرسم المنحنى نفسه بأخذ الراسيات على محور اسـ
والافقيات على محور اصـ
وبهذه المثابة يمكن البحث عن النهاية الكبرى او الصغرى للدالة سـ (التى هى
دالة الى صـ) ولذلك يستخرج من المعادلة المفروضة $\frac{وسـ}{وصـ} = م$

ثم يفرض م = ٠ ومن ثمة ينتج $\frac{وصـ}{وسـ} = \frac{1}{م}$ من معادلة

$\frac{وسـ}{وصـ} = م$ ويشاهد أنه متى يكون م = ٠ يوجد $\frac{وصـ}{وسـ} = \infty$

ويعلم من ذلك ان الشرط اللازم لوقوع نهاية كبرى اوصغرى فى جهة الافقيات
هو أن يكون $\frac{وصـ}{وسـ} = \infty$

* ١١٦ * ولنمثل بمعادلة

$$صـ^2 = حسـ - د$$

فنستخرج منها $\frac{وصـ}{وسـ} = \frac{ح}{٢صـ}$ وبمساواة هذا المقدار بصفر
يكون صـ = ∞ ويتبين من ذلك انه لا يوجد للمنحنى نهاية كبرى نحو
الراسيات الاعلى بعد غير محدود من محور اسـ
ولاجل أن يعرف هل توجد له نهايات نحو الافقيات اولا
(والنهايات تشمل الكبرى والصغرى) يفرض مقدار

$\frac{\text{و}^{٢}\text{صـ}}{\text{و سـ}}$ غير منتهية فيوجد $\frac{ح}{٢\text{صـ}} = \infty$ وهو شرط يتحقق متى يجعل
صـ = ٠

وبهذا يؤول مقدار $\frac{\text{و}^{٢}\text{صـ}}{\text{و سـ}^{٢}}$ الى $\frac{ح}{٢}$ وهو ناتج موجب ويعلم من ذلك
ان مقدار صـ = ٠ يصلح الى نهاية صغرى لكمية سـ وتتعين هذه
النهاية بجعل صـ = ٠ فى المعادلة المفروضة فتؤول الى
حسـ ـ د = ٠ ومنها يحدث سـ = $\frac{د}{ح}$ وهو مقدار النهاية الصغرى
المطلوبة وهى مبينة بخط ام فى (شكل ٢٣)

* ١١٧ * ولينا تل ان معادلة $\frac{\text{و صـ}}{\text{و سـ}} = \infty$ تدل على ان مماس
م ط (شكل ٢٣) ظل لزاوية قائمة ومن ثم يكون عموديا على محور الاقفيات

(كلام كلى على النقط الفريدة او الغريبة للمنحنيات)

* ١١٨ * فى حساب التفاضل فائدة عظيمة لمعرفة صورة او شكل
المنحنى المعلوم المعادلة وقد انهت لنا قضايا النهايات الكبرى والصغرى طرق
تعيين حدود المنحنى فى جهة الاقفيات والراسيات ولكن هذا غير كاف
فى تعيين صورة المنحنى او شكله فانك تشاهد مثلا عدم تشابه منحنيات اشكال
(٦٨) و (٦٩) و (٧٠) التى لها نهايات متحدة وهى وح و ود
فى جهة الراسيات و او و وب فى جهة الاقفيات فان منحنى
(شكل ٦٨) يتميز عن منحنى (شكل ٦٩) بكون انه لا يوجد فى
الاخير الا نقطة تحديب واحدة ونقطة التحديب هى التى يتحول المنحنى فيها من
التحديب الى التقعير او عكسه واما المنحنى الاول وهو الموافق الى (شكل ٦٨)
فانه يحتوى على نقطتين من نقط التحديب احداهما فى هـ والاخرى فى ح
ويحتوى على نقطة قلبية او عكسية فى ع والمراد بهذه النقطة كل نقطة
يتعطل المنحنى فيها عن طريق سيره دفعة واحدة

* ١١٩ * وعلى العموم كل نقطة وقع للمنحنى فيها تغير فى سيره تسمى
نقطة

نقطة فريدة او غريبة واذا علمنا مواضع هذه النقط امكن مع السهولة تتبع المنحنى فى سيره

مثاله اذا فرض انه يوجد لمنحنى (شكل ٧٠) نقطتا تحديب احداهما فى ﮬ والاخرى فى ش ونقطتان عكسيتان فى ف و ح امكن تشكيل المنحنى بالكيفية الآتية وهى أن نقول بالابتداء من نقطة ا التى هى التحديد فى جهة الافقيات يتقعر المنحنى اولا نحو محور الافقيات الى نقطة ﮬ التى توجد فيها نقطة تحديب أعنى يتحول المنحنى فيها من التقعير الى التحديب ومن هذه النقطة الى ف يكون قوس ﮬ ف من المنحنى محدبا نحو المحور المذكور وفى نقطة ف التى هى نقطة عكسية يتعطل المنحنى عن طريق سيره ومن بعدها يكون محدبا ايضا فى جزء ف ش ليصير مقعرا فى الجهة الثانية لنقطة التحديب ش ويمتد هكذا الى نقطة ح التى هى التحديد نحو الراسيات ويتركب المنحنى اخيرا من قوسى ح ب ح و ا د ح من ابتدا ح الى ح ومن ابتدا ا الى ح وهذان القوسان يتقعران نحو محور الافقيات ويتلاقيان فى نقطة عكسية ويمران بنقطتى ب و د الدالة احداهما على التحديد جهة الافقيات والاخرى على التحديد جهة الراسيات

* ١٢٠ * ومن بعد ما تقرر تعلم مزية تعيين ابعاد النقط الغريبة بواسطة معادلة المنحنى وحيث بينا آنفا طرق ايجاد النهايات الكبرى والصغرى فلم يبق علينا الآن نشتغل ببحث ما بقى من النقط وهى الغريبة فنقول

(فى نقط التحديب)

* ١٢١ * قد علمنا مما سبق ان نقطة التحديب هى التى يتحول المنحنى فيها من التحديب الى التقعير أو من التقعير الى التحديب فمنحنى مَ م مُ (شكل ٧١) يحتوى على نقطة من هذا الجنس فى م فنمد من هذه النقطة مماس طَ ط ثم نعتبر كافة الراسيات المحصورة بين مَ حَ و م ح فنشاهد أن الامتداد مَ ﻫَ للراسى يأخذ فى النقص وينعدم فى نقطة م واذا اعتبرنا الراسيات التى بعد وهى الكائنة عن يسار م ح شاهدنا وقوع الامتداد مُ ﻫُ

تحت المماس ومن ثم تتغير اشارته يعني انه اذا كان مَ نَ موجبا يكون
مُ نُ سالبا وهذا هو الشرط الذي ها نحن نشرحه بالمعادلة فنقول
ليكن في (شكل ٧١) ح عَ = هـ = ح عَ فمن المعلوم انه يوجد

مَ نَ = مَ عَ − نَ عَ أو

مَ نَ = د(س + هـ) − نَ عَ ...... (٥٤)

ولتعيين مقدار نَ عَ نضع

نَ عَ = م ع + نَ و أو

نَ عَ = ص + نَ و ...... (٥٥)

ولاستخراج مقدار نَ و نظرا انه يحدث من مثلث نَ م و القائم الزاوية

نَ و = م و ظا نَ م و

وحيث انه يعلم من بند (٧١) ان ظل زاوية نَ م و الواقعة بين المماس
والخط المرسوم من نقطة التماس م موازيا للخط الافقي يساوي وا ص / وا س
فاذا أبدلنا ظا نَ م و في المعادلة الاخيرة بهذا المقدار ووضعنا هـ بدلا
عن م و نجد أن

نَ و = هـ (وا ص / وا س)

وبوضع هذا المقدار في معادلة (٥٥) عوضا عن نَ و ووضع مقدار
نَ عَ الحادث بعد ذلك في معادلة (٥٤) يوجد

مَ نَ = د(س + هـ) − ص − هـ (وا ص / وا س) ...... (٥٦)

ويمكن استخراج مقدار مُ نُ من مقدار مَ نَ بدون احتياج الى
حساب لانه اذا قدرنا سيران الرامي بالتوازي لنفسه يشاهد أن مَ نَ
يؤول الى مُ نُ متى تغير هـ بكمية − هـ ويعلم من ذلك انه اذا
غيرنا كمية + هـ بكمية − هـ في معادلة (٥٦) يوجد

مُ

$$\text{م}''\text{ن}'' = \text{د}(\text{س} - \text{هـ}) - \text{ص} + \frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,\text{هـ} \quad \cdots\cdots (٥٧)$$

واذا أبدلنا الآن كميتى $\text{د}(\text{س}+\text{هـ})$ و $\text{د}(\text{س}-\text{هـ})$ بالحلول المكافئة لهما يكون

$$\text{م}'\text{ن}' = \left(\text{ص} + \frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \text{الخ}\right) - \text{ص} - \frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,\text{هـ}$$

$$\text{م}''\text{ن}'' = \left(\text{ص} - \frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,\text{هـ} + \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} - \text{الخ}\right) - \text{ص} + \frac{\text{و}\,\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}}\,\text{هـ}$$

وباختصار هاتين المعادلتين يحدث

$$\text{م}'\text{ن}' = \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{١\times٢\times٣} + \cdots\ \text{الخ}\ \cdots (٥٨)$$

$$\text{م}''\text{ن}'' = \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} - \frac{\text{و}^{٣}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{١\times٢\times٣} + \cdots\ \text{الخ}\ \cdots (٥٩)$$

لكن لوقوع نقطة تحديب فى م يجب أن يكون احد خطى $\text{م}'\text{ن}'$ و $\text{م}''\text{ن}''$ واقعا فوق مماس ط ط' والآخر تحته متى تأخذ هـ مقدارا صغيرا جدا فيعلم من ذلك انه يلزم معا كسة $\text{م}'\text{ن}'$ و $\text{م}''\text{ن}''$ فى الاشارة وهذا لا يمكن الا اذا كان الحد الاول وهو $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢}$ من متسلسلتى (٥٨) و (٥٩) صفرا لانه اذا لم يكن هذا الحد مساويا الى صفر أمكن اعطاء كمية هـ مقدارا صغيرا كافيا لان يجعل $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\,\text{س}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢}$ فائقا حاصل الجمع الجبرى للحدود التى تليه فى المتسلسلة واشارة هذا الحد تكون فى هذه

الحالة كاشارة ناتج المتسلسلة وحيث كان هذا الحد متحد الاشارة في المتسلسلتين يكون م ۞َ و مُ ۞ُ (شكل ٧١) متحدى الاشارة ايضا ومن اجل ذلك يعلم انه ليكون م ۞َ و مُ ۞ُ مختلفى الاشارة يلزم أن يوجد

$$\frac{و^٢ص}{و س^٢} \; هـ^٢ = ٠$$ أو وهو الأولى

$$\frac{و^٢ص}{و س^٢} = ٠$$

* ١٢٢ * اذا جعل مقدار س الجاعل $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ صفرا مقدار $\frac{و^٣ص}{و س^٣}$ ايلا الى صفر أيضا يجب لوجود نقطة تحديب أن يكون $\frac{و^٤ص}{و س^٤}$ مساويا الى صفر كذلك واذا صار في هذه الحالة $\frac{و^٥ص}{و س^٥}$ صفرا يجب أن يكون ايضا $\frac{و^٦ص}{و س^٦}$ مساويا الى صفر لتوجد نقطة تحديب وعلى هذا فقس واذن يجب أن يكون المكرر التفاضلي الاخير الذي يكون صفرا برتبة مزدوجة

* ١٢٣ * متى يجعل مقدار س المتحد في حلى (٥٨) و (٥٩) $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ غير محدود يكون هذان الحلان غير محدودين ايضا ولا ينتج شيء حينئذ من الاثبات السابق المؤسس على امكانية هذين الحلين و ينبغي أن يعلم في هذه الحالة أن شرط $\frac{و^٢ص}{و س^٢} = ٠$ يستدل به في العموم على وجوب تغيير اشارة $\frac{و^٢ص}{و س^٢}$ في نقطة التحديب و هذا يوافق ماهو مشروح في بند (١١٣) ويمكن تغيير هذه الاشارة ايضا حين يصير هذا المكرر

التفاضلى

التفاصلي غير منتهٍ ولنمثل بمثال موضح لهذه المشكلة فنقول

ليكن $\frac{و^2 ص}{و س^2} = \frac{ى^2}{س - ح}$

فاذا ابدلت س بهذه المقادير

$س = ح - هـ$ يوجد $\frac{و^2 ص}{و س^2} = - \frac{ى^2}{هـ}$

$س = ح$ $\frac{و^2 ص}{و س^2} = \infty$

$س = ح + هـ$ $\frac{و^2 ص}{و س^2} = + \frac{ى^2}{هـ}$

ثم يشاهد ان مقام مقدار $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ هو الذى تتغير اشارته فى المكرر التفاضلي بعد نقطة التحديب

* ١٢٤ * وينتج مما سبق انه لامكان وجود نقطة تحديب فى منحنٍ يلزم أن يوجد لافق هذه النقطة

$\frac{و^2 ص}{و س^2} = ٠$ او $\frac{و^2 ص}{و س^2} = \infty$

ومتى تؤكد وقوع احد هذين الشرطين تزاد وتنقص على التوالى من افقي النقطة الموافقة لهذا الشرط كمية صغيرة جدا هـ فاذا صار مقدارا $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ الحادثان مختلفي الاشارة كان للمنحنى نقطة تحديب لانه متى يكون $\frac{و^2 ص}{و س^2}$ موجبا يكون تحديب المنحنى متجها نحو محور الآفاق ومتى يكون سلبيا يكون تقعير المنحنى متجها نحو المحور المذكور .

(المثال الاول)

* ١٢٥ * لتطبيق القضايا السابقة على امثلة ننظر هل يوجد للمنحنى المستدل عليه بمعادلة

$$ص = د + ٢ (س - ح)^{٣} \dots\dots (٦٠)$$

نقطة تحديب ولذلك ناخذ التفاضل فيوجد بعد القسمة على وس

$$\frac{وص}{وس} = ٣ \times ٢ (س - ح)^{٢}$$ ثم يوجد

$$\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = ١٢ (س - ح)$$ و

$$\frac{و^{٣}ص}{وس^{٣}} = ١٢$$

ولاجل أن يمكن وجود نقطة تحديب للمنحنى يجب أن يكون لمتغير س مقدارا يجعل $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}$ ايلا الى صفر وحيث كانت س كمية متغيرة فيتعين احد مقاديرها بشرط وجود ١٢ (س - ح) = ٠ ويوجد حينئذ س = ح لاجل الافق الذى يمكن أن يصلح لنقطة تحديب ولتأكيد وجود هذه النقطة فى المنحنى ينقص من افق ح كمية صغيرة جدا رمزها هـ ثم يوضع ح - هـ محل س فتكون نقطة مَ (شكل ٧٢) التى افقها ح - هـ موافقة الى

$$\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = - ١٢ هـ$$

ثم يوضع ح + هـ محل س فتوافق نقطة مً التى افقها ح + هـ الى $\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} = + ١٢ هـ$ وبسبب اختلاف هذين الحلين فى الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديب فى المنحنى المفروض فى م وحيث كان فرض س = ح يجعل $\frac{وص}{وس}$ آيلا الى صفر ايضا فيتحقق توازى المماس فى نقطة التحديب بالمحور الافقى

(المثال الثانى)

١٢٦ * ولينتبه انه لا يتيسر دائما مساواة مقدار $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}}$ الى صفر فانه للبحث عن وجود نقط التحديب فى المنحنى الذى معادلته $\text{ص} = \text{ء} + \text{ح}\text{س}^{٢}$ اولا يجرى التفاضل ويستخرج منه

$$\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{س}} = ٢\,\text{ح}\,\text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}} = ٢\,\text{ح}$$

ولا شك انه لا يمكن مساواة مقدار $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}}$ بصفر (لانه كمية ثابتة) ومن ثمة يعلم ان المنحنى المستدل عليه بمعادلة $\text{ص} = \text{ء} + \text{ح}\,\text{س}^{٢}$ خال عن نقط التحديب ولا ريبة فى ذلك حيث ان هذا المنحنى قطع مكافى وانما يستدل بسبب ايجاب مقدار $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}}$ على ان هذا المنحنى محدب فى جميع نقطه نحو محور الآفاق

(المثال الثالث)

١٢٧ * ولنمثل بهذه المعادلة $\text{ص}^{٣} = \text{س}^{٥}$ فنحلها بالنسبة الى ص ثم نأخذ تفاضلها فيوجد

$$\text{ص} = \text{س}^{\frac{٥}{٣}}$$

$$\frac{\text{و}\text{ص}}{\text{و}\text{س}} = \frac{٥}{٣}\,\text{س}^{\frac{٢}{٣}}$$

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و}\text{س}^{٢}} = \frac{٥}{٣} \times \frac{٢}{٣}\,\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$$

ثم يوضع $\frac{٥}{٣} \times \frac{٢}{٣}\,\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}} = ٠$ او

$$\frac{١}{\sqrt[٣]{\text{س}}} = ٠ \quad \text{فقط}$$

ليبحث عن مقدار س الموافق الى نقطة التحديب فيرى ان هذه المعادلة

أعنى الاخيرة لا تحقق الا بوضع $س = \infty$ وبهذا لا يستدل على شئ لكنه حيث تيسر لنا ايضا جعل مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ غير منته فتحقق معادلة

$$\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} = \infty$$

بوضع $س = ٠$ وبهذا المقدار يستدل على انه يمكن أن يكون للمنحنى المفروض نقطة تحديب فى النقطة الاصلية ولتأكيد وجود هذه النقطة نبدل $س$ بكميتى $٠ + هـ$ و $٠ - هـ$ اعنى $+ هـ$ و $- هـ$ على التعاقب وننظر هل يكون $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ فى هاتين الحالتين متبوعا باشارتين مختلفتين والاولى أن تفعل هاتان العمليتان معا بابدال $س$ بمقدار $\pm هـ$ فيؤول المكرر التفاضلى الذى بدرجة ثانية الى

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \pm \frac{٥}{٣} \times \frac{٢}{٣} \frac{١}{\sqrt[٣]{هـ}}$$

والمقدار العلوى وهو المتبوع باشارة $+$ ينتسب الى افق اكبر من أفق نقطة التحديب والسفلى وهو المتبوع باشارة $-$ ينتسب الى افق أصغر من افق هذه النقطة وبسبب تخالف هذين المقدارين فى الاشارة يتحقق وجود نقطة التحديب فى المنحنى المستدل عليه بمعادلة $ص^٣ = س^٥$ فى النقطة الاصلية انظر (شكل ٧٣)

(المثال الرابع وهو الاخير)

* ١٢٨ * لتكن هذه المعادلة

$$(ص - ى)^٢ = س^٣ \text{ فيوجد منها}$$

$$ص = ى \pm س^{\frac{٣}{٢}}$$

$$\frac{و ص}{و س} = \pm \frac{٣}{٢} س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{و^{2} ص}{و س^{2}} = \pm \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \frac{١}{\sqrt{س}}$$

وحيث انه بجعل $س = ٠$ يوجد $\frac{و^{2} ص}{و س^{2}} = \infty$ فيستدل بذلك على انه يمكن أن توجد نقطة تحديب فى النقطة الاصلية ولتحقق وجودها اوعدمه نجعل اولا $س = + هـ$ ونضع هذا المقدار فى مقدار $\frac{و^{2} ص}{و س^{2}}$ فيكون

$$\frac{و^{2} ص}{و س^{2}} = \pm \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٢} \frac{١}{\sqrt{هـ}}$$

ثم نجعل $س = - هـ$ فيصير مقدار $\frac{و^{2} ص}{و س^{2}}$ تخيليا وكذا يكون مقدار ص وذلك يدل على ان المنحنى لا يمتد جهة الافاق السالبة واذن لا توجد نقطة تحديب ولو أن $\frac{و^{2} ص}{و س^{2}}$ فى النقطة الاصلية غير محدود وستعرف بالاثر أن النقطة الاصلية ا (شكل ٧٤) هى من طائفة النقط المسماة بالعكسية وانشرحها فنقول

(فى النقط العكسية)

* ١٢٩ * اذا امتنع المنحنى عن طريق سيره دفعة واحدة وانقلب على عقبه كانت له نقطة عكسية فاذا تحدبت احدى طبقتيه نحو محور الآفاق وكانت الطبقة الاخرى متقعرة نحوه كما يرى فى (الشكل ٧٤) يقال للانقلاب اوالانعكاس من الجنس الاول و يكون هذا الانعكاس من الجنس الثانى متى كان تقعيرها تين الطبقتين فى جهة واحدة كما فى (شكل ٧٥)

* ١٣٠ * ويمتنع المنحنى عن طريق سيره هكذا لان المقادير التى يأخذها افق س فى الجهة الاخرى لنقطة ح العكسية يحدث منها مقادير تخيلية للراسى ص ويلزم ذلك أن يكون $\frac{و^{2} ص}{و س^{2}}$ محتويا على كمية

جذرية بالنسبة الى متغير س واذا احدث $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ قبل أن يمتنع
المنحنى عن طريق سيره مقدارين احدهما له اشارة ص والاخر عكسها
استدل بذلك على وجود طيتين للمنحنى مجتمعتين فى نقطة ح (شكل ٧٤)
محدبة احداهما نحو محور الآفاق والاخرى مقعرة وبهذه العلامات يمكن
الاستدلال على نقطة عكسية من الجنس الاول للمنحنى واذا كان العكس
بان كان مقدارا $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ متحدى الاشارة فالطيتان المجتمعتان فى نقطة ح
(شكل ٧٥) لا يمكن أن يكونا الا متحدين فى جهة التقعير او التحديب
ويعلم من ذلك ان الانعكاس فى هذه الحالة يكون من الجنس الثانى

(المثال الاول)

* ١٣١ * تنظر هل يوجد للمنحنى الذى معادلته

$$(ص - س)^٢ = س^٩$$

نقط عكسية ولذلك نستخرج من هذه المعادلة

$$ص = س \pm س^٤ \sqrt{س} \quad ...... \quad (٦١)$$

فنشاهد أنه كلما اخذ متغير س مقدارا سلبيا حدث لمتغير ص مقدارا
تخيليا واذن يمتنع المنحنى عن طريق سيره فى النقطة الاصلية التى ابعادها
$س = ٠$, $ص = ٠$ ولكن هذا غير كاف لتأكيد ايجاد نقطة
عكسية فى النقطة الاصلية لانه يحتمل أن لا يوجد فى هذه النقطة الا قوسا
من منحن يمتد تقعيره على الدوام فى جهة واحدة كما يكون فى رأس القطع الزائد
ولذا ينبغى لمعرفة كون $س = ٠$ يصلح لنقطة عكسية أن يعرف
مايؤول اليه المكرر التفاضلى الذى بدرجة ثانية قرب النقطة الاصلية فيؤخذ
تفاضل معادلة $ص = س \pm س^{\frac{٩}{٢}}$ ثم يقسم الناتج على وس فيوجد

$$\frac{\text{وا}\,\text{ص}}{\text{وا}\,\text{س}} = ١ \pm \frac{٩}{٢}\,\text{س}^{\frac{٧}{٢}} \qquad (٦٢)$$

$$\frac{\text{وا}^{٢}\,\text{ص}}{\text{وا}\,\text{س}^{٢}} = \pm \frac{٩}{٢} \times \frac{٧}{٢}\,\text{س}^{\frac{٥}{٢}} = \pm \frac{٩}{٢} \times \frac{٧}{٢}\,\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}}$$

وللدلالة على تقعير المنحنى نحو محور الافاق او تحديبه قريبا من النقطة التى يمتنع عن طريق سيره فيها يزاد افق هذه النقطة كمية صغيرة ه بأن يجعل س = ٠ + ه أعنى س = ه ويوضع هذا المقدار فى مقدار $\frac{\text{وا}^{٢}\,\text{ص}}{\text{وا}\,\text{س}^{٢}}$ فيحدث

$$\frac{\text{وا}^{٢}\,\text{ص}}{\text{وا}\,\text{س}^{٢}} = \pm \frac{٩}{٢} \times \frac{٧}{٢}\,\text{ه}^{٢}\sqrt{\text{ه}}$$

وحيث ان هذين المقدارين مختلفا الاشارة يستدل بهما على طيتين احداهما ام (شكل ٧٦) تحدب نحو محور الآفاق والاخرى ان تقعر نحوه ويعلم من ذلك ان النقطة الاصلية نقطة عكسية من النوع الاول

(المثال الثانى)

* ١٣٢ * لتكن هذه المعادلة

$(\text{ص} - \text{ى})^{٢} = (\text{س} - \text{ح})^{٣}$ فيستخرج منها

$$\text{ص} = \text{ى} \pm \sqrt{(\text{س} - \text{ح})^{٣}} \quad \cdots\cdots \quad (٦٣)$$

واذا جعلنا س = ح يوجد ص = ى لكن اذا اخذ متغير س مقادير اصغر من ح حدث الى متغير ص مقادير تخيلية لانه بوضع ح ـ ه محل س يوجد $\text{ص} = \text{ى} \pm \sqrt{-\text{ه}^{٣}} = \text{ى} \pm \text{ه}\sqrt{-\text{ه}}$ وهو مقدار تخيلى ويعلم من ذلك ان المنحنى يمتنع عن طريق سيره فى نقطة ح (شكل ٧٤) التى ابعادها ح ، ى ولمعرفة كيفية امتداد طيات هذا المنحنى بعد نقطة ح نبدل س بمقدار ح + ه فى مقدار $\frac{\text{وا}^{٢}\,\text{ص}}{\text{وا}\,\text{س}^{٢}}$ فيحدث لنا

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = \pm \frac{٣}{٤ \sqrt{هـ}}$$

ويستدل بالاشارة العليا على طية ح م المحدبة نحو محور الآفاق وبالاشارة السفلى على طية ح ن المقعرة نحو المحور المذكور واذن توجد نقطة عكسية من الجنس الاول فى ح

(المثال الثالث)

* ١٣٣ * ولنأخذ المنحنى المستدل عليه بمعادلة

$ص = ح س^٢ \pm ء س^٢ \sqrt{س}$ مثالا فنقول

حيث انه بجعل $س = ٠$ يوجد $ص = ٠$ وبجعل $س$ سالبا يكون $ص$ تخيليا يدرك ان المنحنى يمتنع عن طريق سيره فى النقطة الاصلية فنبحث عما يؤول اليه $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ ولذلك نضع المعادلة السابقة بهذه الصورة

$$ص = ح س^٢ \pm ء س^{\frac{٥}{٢}}$$ فنستخرج منها

$$\frac{و ص}{و س} = ٢ ح س \pm \frac{٥}{٢} ء س^{\frac{٣}{٢}}$$ و

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٢ ح \pm \frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} ء \sqrt{س}$$

ثم نعطى الى متغير $س$ مقدارا موجبا صغيرا جدا وليكن $هـ$ فجزء $\frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} ء \sqrt{هـ}$ من مقدار $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ يكون اصغر من جزء $٢ ح$ ويعلم من ذلك ان مقدارى $\frac{و^٢ ص}{و س^٢}$ المستدل عليهما بمعادلة

$$\frac{و^٢ ص}{و س^٢} = ٢ ح \pm \frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٢} ء \sqrt{هـ}$$

يكونان

يكونان موجبان وينتج من ذلك انه يوجد فى النقطة الاصلية طيتان مقعرتان معا بنحو محور الآفاق واذن تكون هذه النقطة نقطة عكسية من الجنس الثانى

* ١٣٤ * النقط العكسية ليست الا طبقة من النقط المسماة نقطا مكررة وهى الآتى شرحها

(فى النقط المكررة)

* ١٣٥ * النقطة التى تجتمع فيها جملة طيات من منحن تسمى نقطة مكررة فان كانت الطيات اثنتين سميت هذه النقطة نقطة مضعفة وان كانت ثلاثة سميت نقطة مثلثة وهلم جرا نظرا لعدة الطيات المجتمعة فيها

* ١٣٦ * لتكن ا (شكل ٧٧) نقطة مضعفة حادثة من طيتى اح و اب المماس بهما اط َ و اط فاذا رمزنا لمعادلة منحنى هاتين الطيتين بهذا الرمز ى (س و ص) = ٠ وكانت هذه المعادلة عارية عن الكميات الجذرية كان تفاضلها وهو الكائن بهذه الصورة ح وس + ك وص = ٠ غير محتو على جذر اصلا لانه لم يدخل فى هذه الدالة تفاضل كمية جذرية وينتج من ذلك ان كميات ح و ك تكون كميات غير جذرية هذا ويوجد من المعادلة السابقة

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = - \frac{\text{ح}}{\text{ك}} \quad \cdots\cdots \quad (٦٤)$$

ويجب أن يكون للمكرر $\frac{\text{و}^٢\text{ص}}{\text{وس}^٢}$ التفاضلى مقداران مختلفان حيث انه يوجد خطان مماسان ويلزم أن يتعين $\frac{\text{ح}}{\text{ك}}$ بواسطة هذا الشرط وذلك يكون متى اشتمل $\frac{\text{ح}}{\text{ك}}$ على جذر لكن ذلك غير ممكن لان $\frac{\text{ح}}{\text{ك}}$ غير جذرى ففى هذه الحالة يلزم أن يكون $\frac{\text{ح}}{\text{ك}}$ آيلا الى هذه الصورة $\frac{٠}{٠}$ لان هذه الصورة غير متعينة فتتحقق بجملة مقادير كما يعلم من الجبر

* ١٣٧ * وها هى كيفية اثبات هذه القضية

نفرض ان $\overset{?}{ا}$ و $\overset{ى}{ا}$ يبينان مقدارى ظلى الزاويتين الواقعتين بين مماسى طيتى المنحنى و بين المحور الافقى فمن اللازم ان تحقق هذه المقادير معادلة

$$ح + ى \frac{و\,ص}{و\,س} = ٠$$

بوضع اى منها محل $\frac{و\,ص}{و\,س}$ ويوجد حينئذ

$$ح + ى \overset{?}{ا} = ٠ \quad و$$

$$ح + ى \overset{ى}{ا} = ٠$$

وبطرح هاتين المعادلتين من بعضهما يوجد

$$ى(\overset{?}{ا} - \overset{ى}{ا}) = ٠$$

ولما كان مضروب $\overset{?}{ا} - \overset{ى}{ا}$ يتركب من كميتين غير متساويتين وهما $\overset{?}{ا}$ و $\overset{ى}{ا}$ فلا يكون صفرا ولتحقيق المعادلة الاخيرة يجب أن يكون $ى = ٠$ وبهذا تؤول معادلة $ح + ى \overset{?}{ا} = ٠$ الى $ح = ٠$ وتؤول معادلة $ح + ى \frac{و\,ص}{و\,س} = ٠$ أو وهو الاولى

$$\frac{و\,ص}{و\,س} = -\frac{ح}{ى} \text{ الى } \frac{و\,ص}{و\,س} = \frac{٠}{٠}$$

* ١٣٨ * اذا كان محل الطيتين المجتمعتين فى نقطة واحدة جملة طيات يكفى أن تعتبر اثنتان منها فقط ولاجل أن تتقاطع جميع الطيات فى ملتقى هاتين الطيتين يجب أن يكون $\frac{و\,ص}{و\,س} = \frac{٠}{٠}$

ولينتأمل انه متى وجدت جملة طيات من منحن لها مماس مشترك كانت هذه الطريقة عاجزة عن التوصيل الى نواتج كالسابقة لكن يجب أن يكون فى هذه الحالة ايضا المكرر $\frac{و\,ص}{و\,س}$ التفاضلى ممكن الايلولة الى هذه الصورة $\frac{٠}{٠}$

وحيث

وحيث كان اثبات هذه القضية يتأسس على اعتبار تماس المنحنيات فنشرحه في بند (١٧٠) حين نتكلم على المنحنيات الالتصاقية فتأمله

* ١٣٩ * من المعلوم ان اثبات بند (١٣٧) مؤسس على خلو المعادلة الاولى من الجذور لكن اذا اخذ تفاضل تلك المعادلة من غير ان تحذف هذه الجذور يمكن أن لا تحدث المعادلة التي يستدل بها على نقط

مكررة $\frac{وص}{وس} = ٠$ كما يظهر لك من معادلة بند (١٣١) فان لها

نقطة مضعفة في النقطة الاصلية ولم تؤل معادلة (٦٢) الى $\frac{٠}{٠}$

بفرض $س = ٠$ ولكن تؤول الى $\frac{وص}{وس} = ١$

* ١٤٠ * وبالجملة فلنضم الى ماذكر أن معادلة $\frac{وص}{وس} = \frac{٠}{٠}$

وان تحققت بوجود النقطة المكررة فليست مستلزمة لها لان الاثبات السابق لا يدل على انه يلزم من وجود هذه المعادلة وجود النقطة وانما ايلولة

$\frac{وص}{وس}$ الى $\frac{٠}{٠}$ تبين فقط احتمال وجود نقطة مكررة في المنحنى المفروض

* ١٤١ * وماذكر يكفي لبيان طريقة معرفة هل يمكن أن توجد للمنحنى المستدل عليه بمعادلة مفروضة نقط مكررة اولا ولذلك يفرض ان هذه المعادلة تكون $ع = ٠$ ثم يؤخذ تفاضلها فيوجد

$ع وس + ك وص = ٠$

وينظر هل تحقق مقادير $س$ و $ص$ معا معادلتي $ع = ٠$ و $ك = ٠$ مع المعادلة المفروضة اولا فان كان ذلك كان هذا دليلا على احتمال وجود نقطة مكررة في المنحنى يستدل على بعديها بمقداري $س$ و $ص$ ولرفع الشك يبحث عن كيفية المنحنى حول هذه النقطة فبهذا البحث يتحقق كون هذه النقطة مكررة

(فى النقط المزدوجة)

* ١٤٢ * النقطة التى تطابق لبعدين حقيقيين فى الجزء الذى تكون فيه ابعاد المنحنى المفروض كلها تخيلية ماعدا هذين البعدين الاثنين تكون لامحالة منفصلة بالكلية عن المنحنى ومن اجل ذلك يقال لها نقطة منفصلة او مزدوجة نظرا لازدواج بعديها الحقيقيين المحصورين بين ابعاد تخيلية

ولنرمز الآن بالرمز $ص = د س$ لمعادلة منحن مشتمل على نقطة مزدوجة ولتكن ابعاد هذه النقطة $ح$ و $ب$ فيلزم أن تكون الابعاد حول هذه النقطة تخيلية والا لم تكن منفصلة ويفهم من ذلك انه اذا زاد افق $ح$ كمية صغيرة جدا ولتكن $هـ$ كان الرأسى المطابق لذلك $د(ح + هـ)$ تخيليا لكن يحدث من متسلسلة تيلور فى العموم

$$د(س+هـ)=ص+\frac{وا ص}{وا س}هـ+\frac{وا^٢ص}{وا س^٢}\frac{هـ^٢}{١\times٢}+\frac{وا^٣ص}{وا س^٣}\frac{هـ^٣}{١\times٢\times٣}+الخ$$

فاذا جعلنا فيها $س = ح$ كان الرأسى الموافق وهو $ص$ آيلا الى $ب$ وبناء عليه يغير فى هذه المتسلسلة $ص$ بكمية $ب$ ويرمز بهذه الرموز

$$\left(\frac{وا ص}{وا س}\right) \text{ و } \left(\frac{وا^٢ص}{وا س^٢}\right) \text{ و } \left(\frac{وا^٣ص}{وا س^٣}\right) + \cdots\cdot الخ$$

لما تؤول اليه المكررات التفاضلية فى هذه الحالة فيوجد

$$د(ح+هـ)=ب+\left(\frac{وا ص}{وا س}\right)هـ+\left(\frac{وا^٢ص}{وا س^٢}\right)\frac{هـ^٢}{١\times٢}+\cdots\cdot الخ$$

ولاجل أن تكون $د(ح+هـ)$ كمية تخيلية يلزم بالاقل أن تكون احدى كميات

$$\left(\frac{وا ص}{وا س}\right) \text{ و } \left(\frac{وا^٢ص}{وا س^٢}\right) \text{ و } \left(\frac{وا^٣ص}{وا س^٣}\right) \cdots\cdot الخ$$ تخيلية

يعنى ان فرضية $س = ح + هـ$ تجعل احدى المكررات التفاضلية آيلة

آيلة الى صفر فاذا وقع هذا الشرط كان وجود النقطة المزدوجة فى المنحنى محتملا ولتكن هذه المعادلة $ص = \pm (س + ب) \sqrt{س}$ مثلا فيؤخذ تفاضلها فيوجد

$$\frac{ءص}{ءس} = \pm \left(\frac{٣}{٢} \sqrt{س} + ٢ \sqrt{س} \right)$$

وحيث ان هذا المقدار يؤول الى كمية تخيلية متى يجعل $س = - ب$ ويؤول مقدار ص الى $ص = ٠$ يعلم من ذلك ان نقطة ا التى ابعادها $س = - ب$ و $ص = ٠$ (شكل ٧٨) يحتمل أن تكون نقطة مزدوجة ونعرف كون هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق باضافة كمية اصغر من ب على بعد ب وكذا بطرح هذه الكمية من ب على الولا فاذا فعلنا هكذا وجدنا فى هاتين الحالتين مقدارين تخيليين لمتغير ص وبهذا نستدل على ان هذه النقطة نقطة مزدوجة بالتحقيق

* ١٤٣ * النقط المزدوجة كالنقط المكررة يحتمل وجودها فى المنحنى متى آل مكرر $\frac{ءص}{ءس}$ التفاضلى الى $\frac{٠}{٠}$ لانه اذا اخذ تفاضل معادلة

$$ك \frac{ءص}{ءس} + ح = ٠ \quad (١)$$

وقسم الناتج على ءس يوجد

$$ك \frac{ء^٢ص}{ءس^٢} + \frac{ءص}{ءس} \frac{ءك}{ءس} + \frac{ءح}{ءس} = ٠ \quad (٢)$$

ويرى ان مكرر الحد المتبوع بكمية $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ هو ك فاذا أخذ التفاضل مرة اخرى شوهد أن ك تكون مكرر الحد المحتوى على $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ ايضا وهكذا بعنى انه متى وصل الى المكرر التفاضلى الذى درجته ن يوجد ناتج بهذه الصورة

$$ك \frac{\text{و}^ن \text{ص}}{\text{و س}^ن} + \frac{ح}{١} = ٠ \quad (٦٥)$$

وينبنى على ذلك انه يوجد بالاقل احد المكررات التفاضليـة ايلا الى كمية تحليلية بمقدار يأخذه متغير س ومن ثم يكون هذا المكرر التفاضلى محتويا

على كمية جذرية واذا رمزنا لذلك المكرر التفاضلى برمز $\frac{\text{و}^ن \text{ص}}{\text{و س}^ن}$ لزم

أن يكون لدالة س المحدثة هذه الكمية ازيد من مقدار واحد وذلك يكفى لان ينتج منه كما فى بند (١٣٧) ان ك = ٠ وتؤول معادلة

$$ح + ك \frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = ٠$$ بهذا المقدار

الى ح = ٠ وينبنى على ذلك أن يكون

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \div$$

(فى المنحنيات الالتصاقية)

* ١٤٤ * لتكن ص = ى س وص = ىٓ س معادلتا منحنيين يتقاطعان فى نقطـة م التى ابعادها اح = سَ وحم = صَ (شكل ٢٤) فيوجد لامحـالة لاجل هذه النقطة

$$ى\, سَ = ىٓ\, سَ$$

واذا فرضنا ان سَ تصير بعد ذلك سَ + هـ احدثت المعادلتان السابقتان

$$رَ\,عَ = ى(سَ+هـ) = ى سَ + \frac{\text{و ى سَ}}{\text{و سَ}} هـ + \frac{\text{و}^٢ \text{ى سَ}}{\text{و سَ}^٢} \frac{هـ^٢}{١\times٢} + \ldots \text{الخ} \quad (٦٦)$$

$$رَ\,عَ = ىٓ(سَ+هـ) = ىٓ سَ + \frac{\text{و ىٓ سَ}}{\text{و سَ}} هـ + \frac{\text{و}^٢ \text{ىٓ سَ}}{\text{و سَ}^٢} \frac{هـ^٢}{١\times٢} + \text{الخ} \quad (٦٧)$$

فاذا

فاذا تطابقت اواتحدت جميع الحدود المتناظرة لهذين الحلين كان المنحنيان المفروضان منطبقين على بعضهما واما اذا كان $\text{ىسَ} = \text{ءسَ}$ فقط فلا تكون لهذين المنحنيين الا نقطة واحدة مشتركة وهى م كما عرفت

واذا وجد $\text{ىسَ} = \text{ءسَ}$ و $\frac{\text{وىسَ}}{\text{وسَ}} = \frac{\text{وءسَ}}{\text{وسَ}}$ معا فان المنحنيين يتقاربان من بعضهما زيادة و يعظم تقاربهما و يشتد متى كان $\frac{\text{و}^{2}\text{ىسَ}}{\text{وسَ}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ زيادة على المعادلات المتقدمة وهلم جرا لان الفرق بين كميتى مُ حَ و مَ حَ يقل كلما كثرت الحدود المتساوية فى الحلول المطابقة لهما

ولتكن بناء على ذلك ح و ذ و ر .... الخ ثوابت معادلة $\text{ص} = \text{ىس}$ فيمكن أن تأخذ هذه الثوابت مقادير اما من غير أن يتغير جنس المنحنى لان معادلة $\text{ص}^{2} = \text{م س} + \text{ه س}^{2}$ مثلا التى يستدل بها على قطع ناقص لاتنتفى الدلالة بها على القطوع الناقصة حين تأخذ ثابتتا م و ه اى مقدارين لان صورة المعادلة لاتختلف (بناء على عدم تغيير اشارتى م و ه وعدم اخذهما مقادير صفر)

و يمكن من بعد ذلك نظر ثوابت ح و ذ و ر ... الخ الداخلة فى معادلات

$$\text{صَ} = \text{ىسَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وىسَ}}{\text{وسَ}} = \frac{\text{وءسَ}}{\text{وسَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{2}\text{ىسَ}}{\text{وسَ}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{2}} \; ..\text{الخ}$$

كثوابت حيث ما اتفقت أعنى اختيارية وبأخذ عدة من هذه المعادلات كعدة ما يوجد فيها من الثوابت تتعين تلك الثوابت بالشرط الذى تكون به هذه المعادلات محققة مثلا اذا لم تحتو معادلة $\text{ص} = \text{ىس}$ الا على ثوابت ح و ذ و ر الثلاث يوضع

$$\text{ىسَ} = \text{ءسَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وىسَ}}{\text{وسَ}} = \frac{\text{وءسَ}}{\text{وسَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{2}\text{ىسَ}}{\text{وسَ}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$$

ويستخرج من هذه المعادلات مقادير ح و ذ و ر بدلالة سَ و صَ و $\frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}}$ الخ

ووضع تلك المقادير في معادلة ص = د س فتتمتع هذه المعادلة بهذه الخاصية وهي انه متى يتغير فيها متغير س بكمية سَ + هـ تكون الثلاث حدود الاول من الطرف الثاني لمعادلة (٦٧) التي توجد بواسطة قانون تيلور مساوية بالتوالي للثلاث حدود الاول من الطرف الثاني لمعادلة (٦٦)

وماذكر بخصوص المعادلة التي لاتحتوي الاعلى ثلاث ثوابت يمكن تطبيقه على المعادلة التي تحتوي على اكثر من ذلك من الثوابت

* ١٤٥ * ولناخذ الحالة التي تدل فيها معادلة ص = د س على خط مستقيم مثالا فتكون تلك المعادلة حينئذ مستعوضة بهذه

$$\text{ص} = \text{ح}\,\text{س} + \text{ب} \quad \cdots\cdots (٦٨)$$

ومعادلات الشرط اللازمة لحذف ثوابت ح و ب تكون

$$\text{د}\,\text{سَ} = \text{ح}\,\text{سَ} + \text{ب} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وا}\,\text{د}\,\text{سَ}}{\text{وا}\,\text{سَ}} = \text{ح} \quad \cdots\cdots (٦٩)$$

وحيث كانت د سَ تبين الرأسي في نقطة م للمنحني الذي معادلته ص = د س وكانت سَ توافق صَ أمكن تغيير د سَ بكمية صَ وتؤول معادلات (٦٩) حينئذ الى

$$\text{صَ} = \text{ح}\,\text{سَ} + \text{ب} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وا}\,\text{صَ}}{\text{وا}\,\text{سَ}} = \text{ح}$$

وبحذف ح يوجد

$$\text{صَ} = \frac{\text{وا}\,\text{صَ}}{\text{وا}\,\text{سَ}}\,\text{سَ} + \text{ب}$$

وبوضع مقدار ب المستخرج من هذه المعادلة ومقدار ح في معادلة (٦٨) التي هي معادلة الخط المستقيم تؤول تلك المعادلة الى

$$\text{ص} - \text{صَ} = \frac{\text{وا}\,\text{صَ}}{\text{وا}\,\text{سَ}}\,(\text{س} - \text{سَ}) \quad \cdots\cdots (٧٠)$$

وهذه المعادلة هي معادلة مماس م ط في نقطة م التي ابعادها

بسَ

بين سَ و صَ (شكل ٥) وسنعرف علة تماس هذا المستقيم

* ١٤٦ * ولنعود للقضية السابقة ولعدم التطويل فى العبارة ندع المنحنيات بمعادلاتها فنقول قد رأينا فى بند (١٤٤) انه متى تكون لمنحنيين ص = د س و ص = ى س نقطة واحدة مشتركة مرموز لابعادها برموز سَ و صَ تكون معادلة هذا الشرط ى سَ = د سَ وبتعيين ثابتتين لمعادلة ص = ى س بواسطة شروط ى سَ = د سَ

$$\text{و}\quad \frac{\text{وا ى سَ}}{\text{وا سَ}} = \frac{\text{وا د سَ}}{\text{وا سَ}}$$

يبتدى هذان المنحنيان فى التقارب

ولنرمز برمز ص = د س لما نؤول اليه ص = ى س بعد ما يوضع فيها مقادير هاتين الثابتتين فمنحنى ص = د س يقال له الالتصاق برتبة اولى لمنحنى ص = د س وكذا اذا حذفت بموجب المقادير الحيث ما اتفقت الممكن اعطاها للثوابت ثلاث ثوابت من معادلة ص = د س بواسطة المعادلات الثلاث الآتية اعنى

$$\text{ى سَ} = \text{د سَ}\ ,\ \frac{\text{وا ى سَ}}{\text{وا سَ}} = \frac{\text{وا د سَ}}{\text{وا سَ}}\ ,\ \frac{\text{وا}^{2}\text{ى سَ}}{\text{وا سَ}^{2}} = \frac{\text{وا}^{2}\text{د سَ}}{\text{وا سَ}^{2}} \qquad (٧١)$$

ورمز برمز ل س لما نؤول اليه ى س بعد وضع مقادير هذه الثوابت فيها كان منحنى ص = ل س الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى ص = د س وهو اشد قربا له من الالتصاق الذى برتبة اولى وعلى هذا فقس واذن توجد لاجل الالتصاق النونى الرتبة معادلات

$$\text{ى سَ} = \text{د سَ}\ ,\ \frac{\text{وا ى سَ}}{\text{وا سَ}} = \frac{\text{وا د سَ}}{\text{وا سَ}}\ ,\ \frac{\text{وا}^{2}\text{ى سَ}}{\text{وا سَ}^{2}} = \frac{\text{وا}^{2}\text{د سَ}}{\text{وا سَ}^{2}} \cdots ,\ \frac{\text{وا}^{ن}\text{ى سَ}}{\text{وا سَ}^{ن}} = \frac{\text{وا}^{ن}\text{د سَ}}{\text{وا سَ}^{ن}} \qquad (٧٢)$$

* ١٤٧ * ولنثبت ان احد الالتصاقين الموجودين بهذه الكيفية اعنى بتغيير ثوابت معادلة واحدة وهو الذى برتبة اقل لايمكن أن يمر بين الالتصاق الآخر وبين المنحنى المنسوب له هذان الالتصاقان ولاجل ذلك

نفرض مثلا ان م ب (شكل ٤٢) يكون منحنى ص = ء س و م ح وهو الذى معادلته ص = ل س يكون التصاقه برتبة ثانية ونريد الآن أن نثبت ان الالتصاق ص = د س الذى برتبة اولى لا يمكن ان يمر بين منحنى م ب و م ح ولذلك نضع سَ + هـ محل س فى هذه المعادلات فيوجد

$$\text{ع}'\text{م}' \text{ أو } \text{ء}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{ء سَ}+\frac{\text{و ء سَ}}{\text{و سَ}}\text{هـ}+\frac{\text{و}^{2}\text{ء سَ}}{\text{و سَ}^{2}}\frac{\text{هـ}^{2}}{٢\times١}$$
$$+\frac{\text{و}^{3}\text{ء سَ}}{\text{و سَ}^{3}}\frac{\text{هـ}^{3}}{٣\times٢}+\dots\text{ الخ و}$$

$$\text{ع}''\text{م}' \text{ أو } \text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{ل سَ}+\frac{\text{و ل سَ}}{\text{و سَ}}\text{هـ}+\frac{\text{و}^{2}\text{ل سَ}}{\text{و سَ}^{2}}\frac{\text{هـ}^{2}}{٢\times١}$$
$$+\frac{\text{و}^{3}\text{ل سَ}}{\text{و سَ}^{3}}\frac{\text{هـ}^{3}}{٣\times٢}+\dots\text{ الخ و}$$

$$\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{د سَ}+\frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}}\text{هـ}+\frac{\text{و}^{2}\text{د سَ}}{\text{و سَ}^{2}}\frac{\text{هـ}^{2}}{٢\times١}$$
$$+\frac{\text{و}^{3}\text{د سَ}}{\text{و سَ}^{3}}\frac{\text{هـ}^{3}}{٣\times٢}+\dots\text{ الخ}$$

وحيث ان منحنى ص = ل س هو الالتصاق برتبة ثانية لمنحنى ص = ء س فيكون

$$\text{ل سَ}=\text{ء سَ و }\frac{\text{و ل سَ}}{\text{و سَ}}=\frac{\text{و ء سَ}}{\text{و سَ}}\text{ و }\frac{\text{و}^{2}\text{ل سَ}}{\text{و سَ}^{2}}=\frac{\text{و}^{2}\text{ء سَ}}{\text{و سَ}^{2}}$$

وغير ذلك توجد بسبب كون منحنى ص = د س هو الالتصاق برتبة اولى لمنحنى ص = ء س هاتان المعادلتان ايضا

$$\text{د سَ}=\text{ء سَ و }\frac{\text{و د سَ}}{\text{و سَ}}=\frac{\text{و ء سَ}}{\text{و سَ}}$$

ويقتضى

وبمقتضى هذه المعادلات تكون

$$\text{ءسَ} = \text{لسَ} = \text{دسَ}$$

$$\frac{\text{وءسَ}}{\text{وسَ}} = \frac{\text{ولسَ}}{\text{وسَ}} = \frac{\text{ودسَ}}{\text{وسَ}}$$

ويكون

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{٢}} = \frac{\text{و}^{٢}\text{لسَ}}{\text{وسَ}^{٢}} \quad \text{فقط}$$

واذا جعلنا لاجل الاختصار

$$\text{ءسَ} + \frac{\text{وءسَ}}{\text{وسَ}}\,\text{هـ} = \text{ك} \qquad \text{و}$$

$$\frac{١}{٢}\,\frac{\text{و}^{٢}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{٢}} = \text{ر}$$

أمكن وضع الثلاث حلول السابقة هكذا .

$$\text{ح مَ أو}\quad \text{ء}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + \text{ر هـ}^{٢} + \frac{\text{و}^{٣}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{٢\times٣} + \cdots \text{ الخ}$$

$$\text{ح مً أو}\quad \text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + \text{ر هـ}^{٢} + \frac{\text{و}^{٣}\text{لسَ}}{\text{وسَ}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{٢\times٣} + \cdots \text{ الخ}$$

$$\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + \frac{\text{و}^{٢}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{٢}}\,\frac{\text{هـ}^{٢}}{١\times٢} + \frac{\text{و}^{٣}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{٢\times٣} + \cdots \text{ الخ}$$

وبالنظر الى ان جميع الحدود من ابتدا الحدّ المتبوع بكمية $\text{هـ}^{٣}$ يوجد لها $\text{هـ}^{٣}$ مضروبا مشتركا يمكن أن يفرض

$$\frac{\text{و}^{٣}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{٣}}\,\frac{\text{هـ}^{٣}}{٢\times٣} + \cdots \text{ الخ} = \text{م هـ}^{٣}$$

وباجراء هذا الاختصار فى المعادلات الاخر يكون

$$\text{ء}(\text{سَ}+\text{هـ}) = \text{ك} + \text{ر هـ}^{٢} + \text{م هـ}^{٣}$$

$$\text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{ك}+\text{ر}\,\text{هـ}^{2}+\text{ن}\,\text{هـ}^{3}$$

$$\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{ك}+\frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}\,\text{هـ}^{2}+\text{ع}\,\text{هـ}^{3}$$

وحيث كان منحنيا $\text{ص}=\text{د س}$ و $\text{ص}=\text{ل س}$ التصاقيين احدهما برتبة اولى والآخر برتبة ثانية يلزم من ذلك أن تخالف كمية ر مقدار $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ يعني انه يكون $\text{ر}<\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ أو $\text{ر}>\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$

فاذا كانت ر اصغر من $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ وكانت ے هي زيادة $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ عن ر وجد

$$\text{ر}+\text{ے}=\frac{1}{2}\,\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$$

واذا كان الامر بالعكس بان كانت ر اكبر من $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ كانت كمية ے سالبة فاذا وضع مقدار $\frac{1}{2}\frac{\text{و}^{2}\text{دسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ هذا في مقدار $\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})$

ولوحظ اشتراك المضروب هـ^{2} في الحلول الثلاث السابقة الى

$$\text{ء}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{ك}+(\text{ر}+\text{م}\,\text{هـ})\,\text{هـ}^{2}$$

$$\text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{ك}+(\text{ر}+\text{ن}\,\text{هـ})\,\text{هـ}^{2}$$

$$\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})=\text{ك}+(\text{ر}+\text{ے}+\text{ع}\,\text{هـ})\,\text{هـ}^{2}$$

لكن بجعل هـ صغيرة جدا تكون كمية ے غير المشتملة على هـ اكبر من كميات م هـ و ن هـ التي تميل نحو الصفر فاذا كانت ے موجبة عند ذلك فاقت $\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})$ دالتي $\text{ء}(\text{سَ}+\text{هـ})$ و $\text{ل}(\text{سَ}+\text{هـ})$ ويعلم من ذلك انه يكون في هذه الحالة $\text{د}(\text{سَ}+\text{هـ})$ أو عَ مً (شكل ٢٤) اكبر من عَ مَ ومن عَ مٌ وهذا يبين ان منحني $\text{ص}=\text{د س}$

المتبين

المتبين بخط م مٌ لايمكن أن يمرّ بين المنحنيين الآخرين

وكذا لو كانت كمية ـ سالبة فانه يكون د(سـَ +هـ) او حَ مٌ

اصغر من حَ مَ ومن حَ مٌ ويكون حينئذ منحنى م مٌ هو الذى يقرب

من محور الآفاق زيادة فلا يمكن أن يكون محصورا بين الآخرين وهذا

ما أردنا اثباته

* ١٤٨ * يمكن الآن أن نبين السبب الموجب ليكون الخط المستقيم

(شكل ٥) الذى فى بند (١٤٥) وهو الالتصاقى برتبة اولى مماسا

بالمنحنى لانه ينتج من القضية السابقة عدم امكان مرور مستقيم اخر بين ذلك

الخط المستقيم و بين المنحنى المفروض وهذه هى خاصية التماس لامحالة

و يقال ان هذا التماس تماس برتبة اولى مع المنحنى وعلى العموم يقال

للالتصاقى النونى الرتبة مماس بالمنحنى الذى هو التصاقى له تماسا نونى الرتبة

و يعلم من ذلك انه متى وجدت بين منحنيين هذه المعادلات الثلاث

$$دسـَ = ىسـَ \quad و \quad \frac{و اد سـَ}{و ا سـَ} = \frac{و اى سـَ}{و ا سـَ} \quad و \quad \frac{و^{٢} د سـَ}{و ا سـَ^{٢}} = \frac{و^{٢} ى سـَ}{و ا سـَ^{٢}}$$

كان لهذين المنحنيين تماس برتبة ثانية و يكون هذا التماس برتبة

ثالثة متى توجد زيادة على الثلاث معادلات السابقة هذه المعادلة

$$\frac{و^{٣} د سـَ}{و ا سـَ^{٣}} = \frac{و^{٣} ى سـَ}{و ا سـَ^{٣}}$$ وقس على هذا

* ١٤٩ * حيث ان معادلة الدائرة التى هى

$$(صـ - و)^{٢} + (سـ - ر)^{٢} = نق^{٢}$$

تحتوى على ثلاث ثوابت فيمكنا أن نعين الدائرة التى يكون لها تماس برتبة ثانية

مع اى منحن وليكن م نَ (شكل ٢٥) المعلوم المعادلة ولذلك نفرض ان

سـَ و صـَ يكونان بعدى نقطة م من محيط هذه الدائرة فمقدار صـَ

يعلم بواسطة معادلة $(صـَ - و)^{٢} + (سـَ - ر)^{٢} = نق^{٢}$ .. (٧٣)

وينبغى استعواض ءسَ به فى معادلات التماس التى هى

$$\text{ءسَ} = \text{ءسَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وءسَ}}{\text{وسَ}} = \frac{\text{وءسَ}}{\text{وسَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{2}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\text{ءسَ}}{\text{وسَ}^{2}}$$

واذا رمزنا برموز س و ص لابعاد منحنى $\text{ص} = \text{ء س}$ فى نقطة التماس آلت المعادلات السابقة الى

$$\text{ص} = \text{صَ} \quad \text{و} \quad \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{2}\text{ص}}{\text{وس}^{2}} = \frac{\text{و}^{2}\text{صَ}}{\text{وسَ}^{2}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٧٤)$$

ويلزم حينئذ ان توضع عوضا عن كميات صَ و $\frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{صَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ مقاديرها المستخرجة من معادلة (٧٣) ومن تفاضلاتها المتوالية التى هى

$$(\text{صَ} - \text{و})\frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}} + \text{سَ} - \text{ر} = ٠ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٧٥)$$

$$(\text{صَ} - \text{و})\frac{\text{و}^{2}\text{صَ}}{\text{وسَ}^{2}} + \frac{\text{وصَ}^{2}}{\text{وسَ}^{2}} + ١ = ٠ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٧٦)$$

لكن وضع مقادير صَ و $\frac{\text{وصَ}}{\text{وسَ}}$ و $\frac{\text{و}^{2}\text{صَ}}{\text{وسَ}^{2}}$ الحادثة من معادلات (٧٣) و (٧٥) و (٧٦) فى معادلات (٧٤) ليس الا حذف هذه الكميات من بين معادلات (٧٣) و (٧٤) و (٧٥) و (٧٦) وذلك يؤول الى مسح العلامات من معادلات (٧٣) و (٧٥) و (٧٦) بان يتأمل مع ذلك انه متى يكون $\text{ص} = \text{صَ}$ يوجد $\text{س} = \text{سَ}$ فاذا مسحت العلامات كما ذكر كان

$$(\text{ص} - \text{و})^{2} + (\text{س} - \text{ر})^{2} = \text{نق}^{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٧٧)$$

$$(\text{ص} - \text{و})\frac{\text{وص}}{\text{وس}} + \text{س} - \text{ر} = ٠ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (٧٨)$$

(ص

$$(ص - و)\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}} + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}} + ١ = \cdots\cdots \quad (٧٩)$$

ومن المعادلة الاخيرة يستخرج

$$(ص - و) = - \frac{\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)}{\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}} \cdots\cdots \quad (٨٠)$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (٧٨) يحدث

$$س - ر = \frac{\frac{وص}{وس}\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)}{\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}} \cdots\cdots \quad (٨١)$$

واذا وضعت مقادير ص − و و س − ر هذه فى معادلة (٧٧) حدث

$$\frac{\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)^{٢}}{\left(\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\right)^{٢}} + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\frac{\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)^{٢}}{\left(\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\right)^{٢}} = نق^{٢}$$

واذا جمعت البسوط التي يوجد لها مضروب مشترك يكون

$$\frac{\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)^{٢}\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)}{\left(\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\right)^{٢}} = نق^{٢}$$

وهذه المعادلة تختصر الى

$$\frac{\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)^{٣}}{\left(\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}\right)^{٢}} = نق^{٢}$$

وباخذ الجذر التربيعي يوجد

$$\text{نق} = \pm \frac{\left(\text{١} + \frac{\text{وص}^{\text{٢}}}{\text{وس}^{\text{٢}}}\right)^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{و}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{وس}^{\text{٢}}}}$$

* ١٥٠ * تضعيف الاشارة متعلق بوضع نق فاذا كان تقعير

المنحنى متجها نحو محور الآفاق كان $\frac{\text{و}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{وس}^{\text{٢}}}$ سالبا على ما فى بند (١١٣)

ولاجل أن يكون نق عند ذلك موجبا يؤخذ نق باشارة السلب ويوضع

$$\text{نق} = - \frac{\left(\text{١} + \frac{\text{وص}^{\text{٢}}}{\text{وس}^{\text{٢}}}\right)^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\frac{\text{و}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{وس}^{\text{٢}}}} \quad \text{..............} \quad (\text{٨٢})$$

لانه متى يتجه تقعير المنحنى نحو محور الآفاق يقوم $\frac{\text{و}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{وس}^{\text{٢}}}$ مقام الكمية

السلبية التى اذا وضعت فى مقدار نق جعلته موجبا

* ١٥١ * الدائرة التى اعتبرناها يقال لها الدائرة الالتصاقية ويقال لنصف قطرها نصف قطر الانحنا ويعلم من ذلك انه لا يلزم لايجاد نصف قطر الانحنا لاى منحن الا معرفة معادلة هذا المنحنى لنستخرج منها المعادلات التفاضلية اللازم وضعها فى قانون (٨٢)

واذا لزم انه يوجه المنحنى تحديبه نحو محور الآفاق يجعل مقدار نق متبوعا باشارة موجبة .

* ١٥٢ * وقد يرقم مقدار نق احيانا بهذه الصورة

$$\text{نق} = \pm \frac{\left(\text{وس}^{\text{٢}} + \text{وص}^{\text{٢}}\right)^{\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}}{\text{وس}\,\text{و}^{\text{٢}}\text{ص}}$$

وهذا

وهذا المقدار يستخرج بسهولة من معادلة (٨٢) لانه اذا اشركت مقامات الحدين الموضوعين بين الحافظتين (ونعنى بالحافظتين القوسين الحاصرتين للحدين المتركب منهما البسط فى قانون ٨٢) ولوحظ ان قوة $\frac{٣}{٢}$ لكمية $وس^٢$ هى $وس^٣$ يحدث

$$نق = - \frac{(وس^٢ + وص^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{وس^٣ \frac{و^٢ص}{وس^٢}} = - \frac{(وس^٢ + وص^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{وس و^٢ص}$$

* ١٥٣ * ولنطبيق قانون (٨٢) على الامثلة نبحث عن نصف قطر الانحنا للقطع المكافى ن‌ام (شكل ٢٦) وهو الذى معادلته

$$س^٢ = ح ص$$

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلة فيوجد $٢ س وس = ح وص$ ومنه يحدث

$$\frac{وص}{وس} = \frac{٢س}{ح} \quad \text{ثم يوجد}$$

$$\frac{و^٢ص}{وس^٢} = \frac{٢}{ح}$$

وبهذا يؤول قانون (٨٢) الى

$$نق = \frac{\left(١ + \frac{٤س^٢}{ح^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٢}{ح}} = \frac{\left[\frac{٤}{ح^٢}\left(\frac{ح^٢}{٤} + س^٢\right)\right]^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٢}{ح}}$$

وباجراء رفع المضروبين الى قوة $\frac{٣}{٢}$ يوجد

$$نق = \frac{٨}{ح^٣} \frac{\left(\frac{ح^٢}{٤} + س^٢\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٢}{ح}} = \frac{\left(\frac{ح^٢}{٤} + س^٢\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{ح^٢}{٤}} \quad \text{....} \quad (٨٣)$$

ولكن مقدار الخط العمودى للقطع المكافى يساوى $\left(\frac{ح^٢}{٤} + س^٢\right)^{\frac{١}{٢}}$

فيتضح من هذا وذاك أن نصف قطر الانحنا للقطع المكافى يساوى لمكعب الخط العمودى مقسوما على مربع نصف الخط القياسى له (وبالبحث عن نصف قطر الانحنا لمعادلة صہ^2 = م سہ + ن سہ^2 الدالة على جميع الخطوط المنحنية التى بدرجة ثانية بحسب كمية ن يتحقق صحة ماذكر لجميع المنحنيات التى بدرجة ثانية)

* ١٥٤ * ويمكن استعمال الدائرة الالتصاقية فى تقدير انحنا اى منحن فى اى نقطة ولتكن م (شكل ٢٥) لانه اذا رسمنا من هذه النقطة قوسا صغيرة جدا ولتكن م ل بنصف قطر يساوى نصف قطر الانحنا فى هذه النقطة أمكن اعتبار هذه القوس كقوس من المنحنى لانه يكاد أن ينطبق عليه لكن حيث ان انحنا م ل يكبر كلما صغر نصف قطره يعلم من ذلك انه يمكن ادراك كبر انحنا المنحنى وصغره بواسطة صغر نصف قطر انحنائه وكبره .

فاذا اعتبرنا مثلا معادلة (٨٣) التى يحدث منها نصف قطر الانحنا للقطع المكافى شاهدنا انه يكون فى رأس المنحنى التى فيها سہ = ٠ مقدار نصف قطر الانحنا هكذا نق = $\frac{ح}{٢}$ وحيث انه متى تزداد سہ على التوالى تزداد كمية نق يستدل بذلك على ان انحنا القطع المكافى يأخذ فى النقص كلما بعد عن رأسه

* ١٥٥ * حيث ان كمية $\frac{ء صہ}{ء سہ}$ تبين ظل الزاوية التى تقع بين المماس فى نقطة م (شكل ٢٧) وبين محور الآفاق فمعادلة الخط العمودى المار بالنقطة التى ابعادها ر و تكون

$$صہ - و = - \frac{ء سہ}{ء صہ} (سہ - ر)$$

وهذه المعادلة هى كمعادلة (٧٨) التى فيها ر و يبينان بعدى مركز الدائرة الالتصاقية فيرى من ذلك ان نصف قطر هذه الدائرة هو خط عمودى

على

على المنحنى

* ١٥٦ * اذا رسمنا الآن من جميع نقط منحن وليكن م مَ مً .. الخ (شكل ٢٨) انصاف أقطار انحنائية م و و مَ وَ و مً وً .. الخ احدثت نقط و و وَ و وً .... الخ التى هى مراكز الدوائر الالتصاقية المارة بنقط م و مَ و مً .... الخ خطا منحنيا جميع نقطه توجد تحت قاعدة واحدة (داخلة فى معادلة منحنى م مَ مً .... الخ لانه متى يعلم هذا المنحنى تنتج منه مواضع جميع تلك النقط) وذلك المنحنى يعنى المتركب من نقط و وَ وً .. الخ يسمى مفرود منحنى م مَ مً .. الخ ومنحنى م مَ مً .. الخ يقال له الانفراد اذا اعتبر بالنسبة الى المفرود

* ١٥٧ * متى ينتقل من نقطة الى اخرى من المفرود فلا تتغير كميتا س و ص فقط ولكن تتغير ايضا كميات ر و وَ و نق معا لان كميتى ر و و هما على وجه العموم بعدا مركز الدائرة الالتصاقية وحيث ان المفرود متكون من جملة هذه المراكز يعلم ان كميتى ر و و هما بعدا هذا المنحنى يعنى بعدا اى نقطة منه فيتغيران من نقطة الى اخرى من المنحنى وكذا تتغير كمية نق التى هى نصف قطر الدائرة الالتصاقية وتبين بعد اى نقطة من المفرود الى أخرى من الانفراد ومن ثم يكون بأخذ تفاضل معادلة (٧٨) بالنسبة الى جميع الحروف [ولا يمكن أخذ تفاضل معادلة $(ص - و)^٢ + (س - ر)^٢ = نق^٢$ ومشتقاتها بخلاف ذلك ومايتراءى من العمل بخلاف ذلك فى استنتاج معادلات (٧٥)(٧٦) من معادلة (٧٣) يجاب عنه انه حيث كانت هذه المعادلة تحتوى على ثابتتين غير متعينتين لزم أن تتعين هذه الثوابت بواسطة شرط كون الدوال المتبينة بالاطراف الاول لمعادلات (٧٥) و (٧٦) تجعل مساوية لصفر وبدون ذلك لم نكن نستدل على انه يستلزم من وقوع معادلة (٧٣) وقوع معادلات (٧٥) و (٧٦)] وبالقسمة على ؤس

$$(ص - و)\frac{ؤ^٢ص}{ؤس^٢} + \frac{ؤص^٢}{ؤس^٢} - \frac{ؤص}{ؤس}\frac{ؤو}{ؤس} + ١ - \frac{ؤر}{ؤس} = ٠$$

فا ٣٢

وبطرح معادلة (٧٩) من هذه المعادلة يبقى

$$-\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}}\,\frac{\text{واو}}{\text{واسـ}}-\frac{\text{وار}}{\text{واسـ}}=\text{٠}$$

ويستخرج من ذلك

$$\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}}=-\frac{\frac{\text{وار}}{\text{واسـ}}}{\frac{\text{واو}}{\text{واسـ}}}=-\frac{\text{وار}}{\text{واسـ}}\times\frac{\text{١}}{\frac{\text{واو}}{\text{واسـ}}}$$

وحيث يعلم من بند (٦٧) ان $\frac{\text{١}}{\frac{\text{واو}}{\text{واسـ}}}=\frac{\text{واسـ}}{\text{واو}}$ يكون

$$\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}}=-\frac{\text{وار}}{\text{واسـ}}\times\frac{\text{واسـ}}{\text{واو}}$$

ويكون بموجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}}=-\frac{\text{وار}}{\text{واو}}$$

واذا وضعنا مقدار $\frac{\text{واصـ}}{\text{واسـ}}$ هذا فى معادلة (٧٨) حدث

$$\text{صـ}-\text{و}=\frac{\text{واو}}{\text{وار}}(\text{سـ}-\text{ر})\cdots\cdots(\text{٨٤})$$

* ١٥٨ * قد رأينا فى بند (١٠٥) ان معادلة

$$\text{صـ}-\text{و}=-\frac{\text{واسـ}}{\text{واصـ}}(\text{سـ}-\text{ر})$$

هى معادلة نصف قطر الانحنا المار بالنقطة التى ابعادها سـ و صـَ
فبتبديل $-\frac{\text{واسـ}}{\text{واصـ}}$ بكمية $\frac{\text{واو}}{\text{وار}}$ لم تزل هذه المعادلة دالة على نصف

قطر

قطر الانحنا المذكور لكن معادلة (٨٤) هى ايضا معادلة المماس المار بنقطة من المفروض ابعادها ر و و [وليتأمل انه حيث كان ر و و رمزا فى العموم لبعدى نقطة ما من المنحنى المفروض فمعادلة هذا المنحنى تكون و = ى ر ومن ثمة تبين كمية $\frac{وا و}{وا ر}$ على موجب ماهو مقرر فى بند (٧١) الزاوية التى يحدثها المماس فى نقطة (ر و و) مع محور الآفاق]فيعلم من ذلك ان نصف قطر الانحنا يماس المفروض

* ١٥٩ * حيث كانت المواد الآتية تتعلق بتفاضل القوس لاى منحن يجب علينا أن نقدم هذه القضية فنقول لتكن كمية ح حَ = هـ ما تفرض زيادتها على أفق اج = س المبين فى (شكل ٣١) فاذا رسمنا خط م و موازيا للمحور الآفاق كان وتر م مَ = $\sqrt{م و^{٢} + مَ وَ^{٢}}$ = $\sqrt{هـ^{٢} + مَ وَ^{٢}}$

ولكن مَ وَ = ى(س + هـ) − ى س = $\frac{وا ص}{وا س}$ هـ + $\frac{وا^{٢} ص}{وا س^{٢}}$ $\frac{هـ^{٢}}{١ × ٢}$ + الخ

فنضع هذا المقدار فى كمية م مَ ونرمز برموز ح٣ و ح٤ و ح٥ .... الخ للمكررات كميات هـ٣ و هـ٤ و هـ٥ ..... الخ ليحدث لنا

$$م مَ = \sqrt{هـ^{٢} + \frac{وا ص^{٢}}{وا س^{٢}} هـ^{٢} + ح_{٣} هـ^{٣} + ح_{٤} هـ^{٤} \cdots\cdots}$$ الخ

وبقسمة الطرفين على هـ يكون

$$\frac{م مَ}{هـ} = \sqrt{١ + \frac{وا ص^{٢}}{وا س^{٢}} + ح_{٣} هـ + ح_{٤} هـ^{٢} + \cdots\cdots}$$ الخ

وبناء على ان القوس الذى يرمز له برمز قو ينطبق على وتره فى حالة التحديد يوجد من المعادلة الاخيرة

$$\frac{وا قو}{وا س} = \sqrt{١ + \frac{وا ص^{٢}}{وا س^{٢}}}$$

ويستخرج من ذلك بواسطة ضرب الطرفين فى $و\!اسـ$

$و\!اقو = \sqrt{و\!اسـ^{٢} + و\!اصـ^{٢}}$ وهو المطلوب

* ١٦٠ * وبهذه الكيفية يوجد لاجل المفرود الذى ابعاده ر و

$و\!اقو = \sqrt{و\!ار^{٢} + و\!او^{٢}}$

* ١٦١ * نأخذ الآن تفاضل معادلة (٧٧) بالنسبة لجميع الحروف فيحدث لنا

$$(صـ - و)(و\!اصـ - و\!او) + (سـ - ر)(و\!اسـ - و\!ار) = نق\, و\!انق$$

ويحدث من معادلة (٧٨)

$$(صـ - و)\, و\!اصـ + (سـ - ر)\, و\!اسـ = ٠$$

فاذا طرحنا هذا الناتج من المعادلة السابقة بقى لنا

$$-(صـ - و)\, و\!او - (سـ - ر)\, و\!ار = نق\, و\!انق \quad \cdots\cdots\cdots \quad (٨٥)$$

واذا وضعنا فى معادلة (٨٥) هذه وفى معادلة (٧٧) مقدار صـ - و المستخرج من معادلة (٨٤) حدثت لنا هاتان المعادلتان

$$\frac{و\!او^{٢}}{و\!ار}(سـ - ر) - (سـ - ر)\, و\!ار = نق\, و\!انق$$

$$\frac{و\!او^{٢}}{و\!ار^{٢}}(سـ - ر)^{٢} + (سـ - ر)^{٢} = نق^{٢}$$

ولما يوضع سـ - ر مضروبا مشتركا ويؤخذ الجذر التربيعى للمعادلة الثانية تؤول هاتان المعادلتان الى

$$-(سـ - ر)\frac{و\!او^{٢} + و\!ار^{٢}}{و\!ار} = نق\, و\!انق$$

$$(سـ - ر)\frac{\sqrt{و\!ار^{٢} + و\!او^{٢}}}{و\!ار} = نق$$

ويقسمة

وبقسمة الاولى من هاتين المعادلتين على الثانية يوجد

و نق = − √(ود٢ + ور٢)

وحيث انه يوجد فى بند (١٦٠) بالرمز برمز قو للقوس من المفروض

و قو = √(ور٢ + ود٢)

فاذا طوبقت هذه المعادلة بالسابقة حدث من ذلك

و نق = − و قو أو

و نق + و قو = ٠ أو

و (نق + قو) = ٠

وبسبب كون كل دالة تفاضلها صفر هى كمية ثابتة يعلم ان حاصل جمع نق + قو يبين كمية ثابتة وينبنى على ذلك انه بازدياد نصف قطر الانحنا ينقص القوس المرموز له برمز قو بمقدار تلك الزيادة والعكس بالعكس وتشرح هذه القضية بهذه الكيفية وهى ان نصف قطر الانحناء يتغير بفروقات مساوية للفروقات التى تحدث عند تغير القوس من المفروض

* ١٦٢ * ليكن (شكل ٢٩) م و = نق و وب = قو و م َو َ = نق َ و و َب = قو َ فيجد لاجل نصف قطر الانحنا م و

نق + قو = ثابتة أو

م و + قوس وب = ثابتة .... (٨٦)

وكذا يوجد لاجل نصف قطر الانحناء م َو َ هذه المعادلة

نق َ + قو َ = ثابتة أو

م َو َ + قوس و َب = ثابتة .... (٨٧)

وحيث ان الاطراف الثانية لمعادلتى (٨٦) و (٨٧) تبين كمية ثابتة واحدة على ما بينه البند المتقدم يوجد من ذلك

م َو َ + قوس و َب = م و + قوس و َب أو

م َو َ − م و = قوس وب − قوس و َب = قوس و و َ

ويعلم من ذلك ان الفرق بين اى نصفى قطرين من انصاف الاقطار الانحنائية يساوى القوس المحصور بينهما أبدا

* ١٦٣ * وينتج من ذلك انه اذا ثنى خيط على المفرود الذى هو و‍ـ (شكل ٢٩) وانتهى مماسا به وكان مثبتا فى نقطة م من الانفراد الذى هو م ح ثم فرد هذا الخيط بابقائه مشدودا على الدوام رسم طرفه م فى تحركه منحنى الانفراد م ح لانه اذا أتى فى موضع وَمَ بتحركه يزداد بقدر قوس وَوَ ومن ثمة يساوى فى الطول نصف قطر الانحناء الذى يمر بنقطة و ومنه يفهم ان طرف مَ لهذا الخيط يكون موجودا على المنحنى الانفرادى

* ١٦٤ * وهاهى كيفية ايجاد معادلة المنحنى المفرود

يستخرج اولا من معادلة المنحنى المراد ايجاد مفروده مقادير ص والمكررات التفاضلية $\frac{وص}{وس}$ و $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ الخ ثم توضع هذه المقادير فى معادلات (٧٨) و(٧٩) فيحدث من ذلك معادلتان مشتملتان على متغير س فيحذف هذا المتغير من بينهما فتنشأ عن ذلك معادلة محتوية على و و ر فتكون هى معادلة المنحنى المفرود المطلوبة

* ١٦٥ * ولنعين بهذه الطريقة مفرود القطع المكافى الذى معادلته س^٢ = ح ص فنأخذ تفاضل هذه المعادلة ليستخرج منه

$$٢س وس = ح وص \quad ومن ثمة \quad \frac{وص}{وس} = \frac{٢س}{ح}$$

$$و \quad \frac{و^٢ص}{وس^٢} = \frac{٢}{ح}$$

فتوضع فى معادلات (٧٨) و (٧٩) مقادير ص و $\frac{وص}{وس}$ و $\frac{و^٢ص}{وس^٢}$ هذه لتحدث المعادلتان المشتملتان على س

$(\frac{س^٢}{ح}$

$$\left(\frac{س^{2}}{ح}-و\right)\frac{٣س^{2}}{ح}+س-ر=٠ \quad\cdots\cdots\quad (٨٨)$$

$$\left(\frac{س^{2}}{ح}-و\right)\frac{٢}{ح}+\frac{٤س^{2}}{ح^{2}}+١=٠ \quad\cdots\cdots\quad (٨٩)$$

ثم نطرح معادلة (٨٨) من معادلة (٨٩) بعد ضربها فى س فيبقى

$$ر+\frac{٤س^{3}}{ح^{2}}=٠ \quad\cdots\cdots\cdots\quad (٩٠)$$

وغير ذلك يوجد بضرب معادلة (٨٩) فى $ح^{2}$ واختصارها

$٦س^{2}-٢ح و+ح^{2}$ ومنه يستخرج

$$و=\frac{٣س^{2}}{ح}+\frac{ح}{٢} \quad\cdots\cdots\cdots\quad (٩١)$$

وبحذف س من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) توجد معادلة المفرود لكن قبل أن تعمل هذه العملية ننبه ان معادلتى (٩٠) و (٩١) يؤولان لاجل النقطة الاصلية التى فيها س = ٠ الى ر = ٠ و و = $\frac{ح}{٢}$ فنأخذ اذن ا‍ب = $\frac{ح}{٢}$ (شكل ٣٢) فتوجد نقطة ب من المفرود ثم يرى بواسطة معادلة (٩١) انه بأخذ متغير س مقادير موجبة اوسالبة يزداد متغير و كلما ازدادت هذه المقادير و ينتج من ذلك ان المفرود يتركب من طيتين ب ح و ب ى

* ١٦٦ * ولاجل حذف س من بين معادلتى (٩٠) و (٩١) تربع الاولى بعد أن يستخرج منها $س^{3}$ فيوجد

$$س^{6}=ر^{2}\frac{ح^{4}}{١٦}$$

ثم يستخرج من معادلة (٩١)

$س^{2}=\left(و-\frac{ح}{٢}\right)\frac{ح}{٣}$ وبتكعيب الطرفين يكون

$$س^{6}=\left(و-\frac{ح}{٢}\right)^{3}\frac{ح^{3}}{٢٧}$$

وبمساواة مقدارى $س^{6}$ ببعضهما وقسمة الناتج على $ح^{3}$ يوجد

$$ر^{2}\frac{ح}{١٦}=\left(و-\frac{ح}{٢}\right)^{3}\frac{١}{٢٧}$$

واذا رمزنا برمز $وَ$ لكمية $و-\frac{ح}{٢}$ وضربنا طرفى هذه المعادلة فى ٢٧ يحدث

$$وَ^{3}=\frac{٢٧}{١٦}ح ر^{2}=ک ر^{2}$$

بجعل $\frac{٢٧}{١٦}$ ع = ن وتحوّل النقطة الاصلية حينئذ الى ـ حيث ان
وَ = و ـ $\frac{ع}{٢}$ (ويعلم بالسهولة كون طيتى ـ ح و ـ د يتقعران
نحو محور الآفاق لانه بأخذ تفاضل معادلة

$$وَ^{٣} = ن ر^{٢} \text{ أو } وَ = ن^{\frac{١}{٣}} ر^{\frac{٢}{٣}} \text{ يوجد}$$

$$\frac{و^{٢}وَ}{و ر^{٢}} = -\frac{٢}{٩} ن^{\frac{١}{٣}} ر^{-\frac{٤}{٣}} = -\frac{٢}{٩} \sqrt[٣]{\frac{ن}{ر^{٤}}}$$

وهذا المقدار موجب سواء كانت ر موجبة أو سالبة فيستدل بذلك
على ان كلا من طيتى المنحنى تتقعر نحو محور الآفاق)

* ١٦٧ * وضع الالتصاقى يكون بكيفيتين مختلفتين بالنظر للمنحنى
الواقع بينه وبينه التماس اوليهما أن توجد طيتاه معا فوق المنحنى
كما فى (شكل ٣٣) او تحته كما فى (شكل ٣٤)
وحينئذ لا يقع بين الالتصاقى والمنحنى الا تماس فقط
وثانيتهما أن تكون احدى طيتى الالتصاقى موجودة فوق المنحنى والاخرى
تحته كما فى (شكل ٣٥) وفى هذه الحالة يقطع الالتصاقى المنحنى فى نقطة م

* ١٦٨ * تثبت الآن ان الدائرة الالتصاقية تقطع المنحنى (شكل ٣٦)
ولذلك نرمز برمزى ص‍ و صَ لراسين احدهما وهو الاول موافق
للمنحنى وثانيهما موافق للالتصاقى ونفرض ايصال هذين الراسين يطابقان
لافق واحد وهو س + هـ فيوجد

$$\left.\begin{aligned} ص_{١} &= د(س+هـ) = د س + ح هـ + \frac{ح}{١}هـ^{٢} + \frac{ح}{٢}هـ^{٣} + \dots \text{الخ} \\ صَ_{١} &= دَ(س+هـ) = دَ سَ + حَ هـ + \frac{حَ}{١}هـ^{٢} + \frac{حَ}{٢}هـ^{٣} + \dots \text{الخ} \end{aligned}\right\} (٩٢)$$

وحيث كانت الدائرة التصاقية برتبة ثانية يلزم أن تكون الثلاثة حدود
الاول من هذين الحلين متساوية ويعلم من ذلك ان الفرق بين الراسين المطابقين

لافق

لافق واحد $س$ + $ه$ يكون

$$(م - مَ) ه^{٣} + الخ \cdots\cdots\quad (٩٣)$$

واذا فرضنا الآن ان الافق يصير $س - ه$ يلزم تغيير كمية $ه$ بكمية $- ه$ فى فضل الراسين فيؤول الى

$$-(م - مَ) ه^{٣} + الخ \cdots\cdots\quad (٩٤)$$

وحيث كان الحد الاول من متسلسلتى (٩٣) و (٩٤) يمكن أن يفوق مجموع الحدود الباقية بأخذ كمية $ه$ صغيرة على قدر الكفاية ينتج منه ان فضل الراسين يتغير فى الاشارة متى يصير الافق $س - ه$ بعد ان كان $س + ه$ وينبنى على ذلك انه اذا كان فرق الراسيات الموافقة لافق $س + ه$ كمية موجبة بأخذ (شكل ٣٦) $ع عً = ع عَ = ه$ معناها انه اذا كان الرأسى $عَ مَ$ للمنحنى يفوق $عَ دَ$ يكون الرأسى $عً دً$ للالتصاقى فائقا الرأسى $عً مً$ للمنحنى وينتج من ذلك ان الالتصاقى يوجد فى احد الوجهين فوق المنحنى وفى الوجه الآخر تحتـه فاذن يقطعه وهذا ما أردنا اثباته

وماذكر بخصوص الدائرة التى هى التصاقى برتبة ثانية يمكن تطبيقه على جميع الالتصاقيات المزدوجة الرتبة

* ١٦٩ * ويتضح من بعد الاثبات السابق انه متى كان الالتصاقى برتبة مفردة كان مماسا بالمنحنى ولا يقطعه وهو ظاهر من بعد الاثبات السابق

* ١٧٠ * ولنذكر القضية الموعود باثباتها فى بند (١٧٠) على النقط المكررة على ماهو مشروح فى بند (١٣٨) فنقول اذا كانت المنحنيات المجتمعة فى احدى هذه النقط لها مماس مشترك ولتكن معادلته $ص = ح س + د$ تغير $ى س$ بكمية $ح س + د$ فى ثانية معادلتى (٩٢) فيحدث من ذلك $\frac{و ى س}{و س}$ أو $حَ = ح$ وجميع المكررات الاخر لهذه المعادلة تكون اصفارا وبسبب كون المماس التصاقيا برتبة

اولى تساوى كمية دس + حه كمية ىس + حَ ه وبذلك يؤول
فرق معادلتى (٩٢) الى

$$\text{ص}_1 - \text{صَ}_1 = \text{ح}_1\text{ه} + \text{ح}_2\text{ه}^2 + \text{ح}_3\text{ه}^3 + \ldots\ldots \text{ الخ}$$

وفرق الراسين هذا يلزم أن يوجد له مقداران كم و كمَ (شكل ٣٠)
ولذلك يجب أن يكون لاحد المكررات التفاضلية المتبينة بهذه الرموز
ح_1 و ح_2 .... الخ مقداران وليكن $\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{دس}}{\text{وس}^{\text{ن}}}$ هو هذا المكرر
التفاضلى لكن حيث انه اذا أخذت التفاضلات المتوالية لمعادلة ح وس
+ ك وص = ٠ لايزال حدّ ك باقيا مضروبا فى التفاضل برتبة
عليا لكمية ص فى كل تفاضل فعل على ماتقرر فى بند (١٤٣) يعلم
من ذلك ان التفاضل برتبة ن للدالة المفروضة يمكن وضعه هكذا

$$\text{ك}\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{وس}^{\text{ن}}} + \text{ح}_1 = ٠$$

ويلزم أن يوجد للمكرر $\frac{\text{و}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{وس}^{\text{ن}}}$ التفاضلى
مقداران ويثبت ان كمية ك تكون صفرا كما فى بند (١٣٧) وبمقدار ك
هذا يؤول مقدار ح الى صفر ايضا وتؤول معادلة $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = -\frac{\text{ح}}{\text{ك}}$
حينئذ الى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{٠}{٠}$ وهو المراد اثباته

(تطبيق قضية تيلور على الدوال المتزايدة التى بمتغيرين)

* ١٧١ * متى تغيرفى دالة ع المشتملة على متغيرين س و ص
غير المرتبطين متغير س بكمية س+ه ومتغير ص بكمية ص+ك
يمكن حل هذه الدالة بواسطة قضية تيلور لانه اذا استبدلت اولا كمية س
بكمية س+ه يوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{هـ}\,،\,\text{ص})=\text{ع}+\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}\,\text{هـ}+\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{2}+\frac{\text{و}^{3}\text{ع}}{\text{و س}^{3}}\,\frac{\text{هـ}^{3}}{2\times3}+\cdots\text{الخ}\cdots \quad (٩٥)$$

وكمية هـ توجد لامحالة فى هذا الحل و صـ لاتدخل الا فى دوال

$$\text{ع}\ ،\ \frac{\text{و ع}}{\text{و س}}\ ،\ \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}\ ،\ \frac{\text{و}^{3}\text{ع}}{\text{و س}^{3}}\ \cdots\cdots\cdots\ \text{الخ}$$

فاذا غيرت صـ بكمية صـ + ك فى هذه الدوال لزم أن تغير فى معادلة (٩٥)

$$\text{ع بكمية ع}+\frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و ص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2}+\frac{\text{و}^{3}\text{ع}}{\text{و ص}^{3}}\,\frac{\text{ك}^{3}}{2\times3}+\cdots\text{الخ}$$

$$\text{و}\ \frac{\text{و ع}}{\text{و س}}\ \text{بكمية}\ \frac{\text{و ع}}{\text{و س}}+\frac{\text{و}.\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}}{\text{و ص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{2}.\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}}{\text{و ص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2}+\frac{\text{و}^{3}.\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}}{\text{و ص}^{3}}\,\frac{\text{ك}^{3}}{2\times3}\cdots+\text{الخ}$$

$$\text{و}\ \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}\ \text{بكمية}\ \frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}+\frac{\text{و}.\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}}{\text{و ص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{2}.\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}}{\text{و ص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2}+\frac{\text{و}^{3}.\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}}{\text{و ص}^{3}}\,\frac{\text{ك}^{3}}{2\times3}\cdots+\text{الخ}$$

الخ و الخ و الخ و الخ و الخ

وترقم سطور بقدر ما فى معادلة (٩٥) من الحدود فيوجد

$$(٩٦)\ \left\{\begin{aligned}
\text{د}(\text{س}+\text{هـ}\,،\,\text{ص}+\text{ك}) &= \text{ع}+\frac{\text{و ع}}{\text{و ص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و ص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2}+\text{الخ}\\
&+\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}\,\text{هـ}+\frac{\text{و}.\frac{\text{و ع}}{\text{و س}}}{\text{و ص}}\,\text{هـ ك}+\text{الخ}\\
&+\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{و س}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{2}+\text{الخ}\\
&+\text{الخ}
\end{aligned}\right.$$

* ١٧٢ * واذا فعل هذا التبديل بوجه معاكس يوجد اوّلا بتغيير ص بكمية ص + ك

$$\text{د}(\text{س}\,\text{و}\,\text{ص}+\text{ك})=\text{ع}+\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2}+\frac{\text{و}^{3}\text{ع}}{\text{وص}^{3}}\,\frac{\text{ك}^{3}}{2\times3}\cdots+\text{الخ}$$

ثم ينتهى بوضع س + هـ محل س فى كل حدّ الى هذا الناتج

$$\left.\begin{aligned}
&\text{د}(\text{ص}+\text{ك}\,\text{و}\,\text{س}+\text{هـ})=\text{ع}+\frac{\text{وع}}{\text{وس}}\,\text{هـ}+\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وس}^{2}}\,\frac{\text{هـ}^{2}}{2}+\cdots\text{الخ}\\
&\qquad\frac{\text{وع}}{\text{وص}}\,\text{ك}+\frac{\text{و}.\frac{\text{وع}}{\text{وص}}}{\text{وس}}\,\text{هـك}+\cdots\text{الخ}\\
&\qquad+\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وص}^{2}}\,\frac{\text{ك}^{2}}{2}+\cdots\text{الخ}\\
&\qquad+\cdots\text{الخ}
\end{aligned}\right\}\quad(97)$$

وحيث كان الترتيب الذى فعلت به هذه التبديلات بالاختيار لانه يجب وضع س + هـ فى جميع المحلات التى تدخل فيها س ووضع ص + ك فى جميع المواضع التى تدخل فيها ص فلا تؤثر هذه العمليات على بعضها ومنه ينتج وجوب تطابق حلى (٩٦) و (٩٧) وعليه ينبنى اتحاد مقادير الحدود المتبوعة بحواصل ضروب متحدة فى هـ و ك فاذا ساوينا الحدود المضروبة فى هـك ببعضها نجد

$$\frac{\text{و}.\frac{\text{وع}}{\text{وس}}}{\text{وص}}=\frac{\text{و}.\frac{\text{وع}}{\text{وص}}}{\text{وس}}$$

او وهو الاولى

$$\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وس}\,\text{وص}}=\frac{\text{و}^{2}\text{ع}}{\text{وص}\,\text{وس}}$$

ويفهم من هـذه المعادلة ان ترتيب التفاضل فى اخذ التفاضل الثانى لحاصل

ضرب

ضرب متغيرين اواى دالة بمتغيرين اختيارى ويعرف ايضا ان ترتيب المكررات التفاضليـة بدرجة علياهو اختيارى بمساواة المكررات التفاضلية للحدود الاخر من معادلتى (٩٦) و (٩٧) ببعضها والله اعلم

(فى النهايات الكبرى والصغرى للدوال التى بمتغيرين)

* ١٧٣ * قد رأينا فى بند (١٧١) انه اذا غير س بكمية س + هـ ومتغير ص بكمية ص + ك فى الدالة المشتملة على متغيرى س وص غير المرتبطين يعلم حل ى(س + هـ و ص + ك) بمعادلة (٩٦) فاذا بينا ى (س + هـ و ص + ك) فى هذه المعادلة

برمز $ع_١$ و ك برمز م هـ و $\frac{وع}{وص} \cdot \frac{وع}{وس}$ برمز $\frac{و^٢ع}{وس وص}$ نجد

$$ع_١ = ع + هـ\left(\frac{وع}{وص}م + \frac{وع}{وس}\right) + \frac{١}{٢}هـ^٢\left(\frac{و^٢ع}{وص^٢}م^٢ + ٢\frac{و^٢ع}{وس وص}م + \frac{و^٢ع}{وس^٢}\right)$$

+ الحدود المحتوية على $هـ^٣$ و $هـ^٤$ و .. الخ .. (٩٨)

ولاجل أن تكون ع نهاية كبرى او صغرى يلزم أن تجعل بعض المقادير المعطاة الى هـ و ك كمية $ع_١$ اكبر من ع ابدا أو اصغر منها ابدا

ولا يقع ذلك الا اذا كان حد هـ$\left(\frac{وع}{وص}م + \frac{وع}{وس}\right)$ صفر الانه اذا لم يكن

كذلك أمكن صيرورة هـذا الحد اكبر من حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود التى تليه بواسطة مقدار لايق لكمية هـ كما فى بند (٨٩) وبأخذ هـذا المقدار على التعاقب موجبا وسالبا تصير $ع_١$ فى احدى الحالتين اكبر من كمية ع وفى الاخرى اصغر منها ويعلم حينئذ انه لتكون دالة ع هذه نهاية كبرى اونهاية صغرى يلزم ان يوجد

$$هـ\left(\frac{وع}{وص}م + \frac{وع}{وس}\right) = ٠ \quad \text{أو وهو الاولى}$$

$$\frac{وا ع}{وا ص} م + \frac{وا ع}{وا س} = ٠$$

وحيث كانت الزيادة ك حيث ما اتفقت تكون م كذلك ولا تزال المعادلة حينئذ واقعة مهما كانت م وذلك يقتضي أن تنقسم هذه المعادلة الى هاتين

$$\frac{وا ع}{وا ص} = ٠ \quad و \quad \frac{وا ع}{وا س} = ٠$$

* ١٧٤ * نبحث الآن عما يميز النهاية الكبرى من الصغرى ولذلك ننبه انه حيث كان الحد المشتمل على ه صفرا فالحد المحتوى على $ه^٢$ يكون هو المتمتع باشارة حاصل الجمع الجبرى لجميع الحدود التي تأتي بعد ع ويلزم حينئذ أن الحد المشتمل على $ه^٢$ ان كان غير صفر لا يكون متعينا بواسطة مقادير ه و ك موجبا تارة وسالبا أخرى والا لكانت $ع_١$ فى احدى الحالتين اصغر من ع وفى الحالة الاخرى اكبر منها وحيث كان الامر كذلك فنشرع فى البحث عن الشرط اللازم وقوعه ليحفظ الحد المشتمل على $ه^٢$ اشارة واحدة مهما كانت المقادير المعطاة الى كميتى ه و ك وفى هذا المبحث نبين الحد المحتوى على $ه^٢$ من معادلة (٩٨) بهذا الرمز

$$\frac{١}{٢} ه^٢ (ح م^٢ + ٢ س م + ع)$$

وبوضع ح مضروبا بمشترك يؤول هذا الحد الى

$$\frac{١}{٢} ح ه^٢ (م^٢ + ٢ \frac{س}{ح} م + \frac{ع}{ح}) \cdots\cdots (٩٩)$$

وباضافة كمية $\frac{س^٢}{ح^٢} - \frac{س^٢}{ح^٢}$ التى مقدارها صفر على ما بين الحافظتين يمكن وضع كمية (٩٩) هكذا

$$\frac{١}{٢} ح ه^٢ [(م + \frac{س}{ح})^٢ + \frac{ع}{ح} - \frac{س^٢}{ح^٢}] \cdots (١٠٠)$$

ويرى انها تكون باشارة ح متى اتحد ع و ح فى الاشارة وكان $\frac{ع}{ح} > \frac{س^٢}{ح^٢}$ يعنى $ع ح > س^٢$ لان الكمية المضروبة فى $\frac{١}{٢} ح ه^٢$ حينئذ

تكون

تكون موجبة واشارة كمية (١٠٠) تتعلق باشارة ح واذن توجد نهاية كبرى اونهاية صغرى بحسب كون ح سالبة أوموجبة يعنى بحسب اشارة $\frac{و^٢ع}{و\,ص^٢}$ المتحدة مع اشارة $\frac{و^٢ع}{و\,س^٢}$ حيث انه شوهد أن ح و ح يفرضان باشارة واحدة

(فى تحويل الاحداثيات المستقيمة الى احداثيات قطبية)

* ١٧٥ نعتبر منحنى سدح (شكل ٧٩) المتعين فيه موضع نقطة م بواسطة الاحداثيات المستقيمة اح = س و م ح = ص وهذه النقطة يمكن تعيينها كذلك اذا علمت زاوية م ا ح والنصف قطر الاحتراقى ام ولما كانت الزوايا تقاس بالاقواس عادة استبدلت زاوية م ا ح بقوس مَ و المرسوم بنصف قطر مأخوذ وحدة ومن ثمة يمكن استعواض الاحداثيات القطبية التى هى مَو = ى و ام = ع بالاحداثيات المستقيمة اح = س و م ح = ص

* ١٧٦ * ولنتأمل ان مبدأ الآفاق قد يكون بعض الاوقات غير نقطة و لانه يمكن تعيين نقطة م كذلك اذا اعتبرت نقطة وَ نقطة الابتداء وعلم قوس وَمَ ونصف قطر ام الاحتراقى وفى هذه الحالة يمكنا أن نرمز لقوس وَمَ برمز ىَ وحينئذ فجميع الآفاق المحسوبة من مبدأ و تختلف عن الآفاق المحسوبة من مبدأ وَ بكمية ثابتة هى ووَ ونوجد بينها اى بين تلك الآفاق المخالفة هذه المعادلة

ى = ىَ ــ ووَ

وحيث انه يمكن بواسطة هذه المعادلة تغيير المبدأ بما يناسب نفرض ان هذا المبدأ يكون و لاجل السهولة

* ١٧٧ ولتكن الآن د(س و ص) = ٠ المعادلة التى يراد أن تتغير فيها الاحداثيات المستقيمة اح = س و ح م = ص بالاحداثيات القطبيه ومَ = ى و ام = ع فنبحث عن

التعادل والارتباط الذى يقع بين هذه الاحداثيات ولذلك ننظر انه يوجد

اح = ام جتا م اح و حم = ام جا م اح أو

س = ع جتا ى و ص = ع جا ى .....(١٠١)

وينبغى حينئذ وضع هذه المقادير فى معادلة د(س و ص) = ٠

لتحدث المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه

* ١٧٨ اذا كانت النقطة الاصلية للاحداثيات المستقيمة س و صَ ليست فى مركز ا للمنحنى (شكل ٨٠) وكانت ر و و الاحداثيات المركز او سَ و صَ الاحداثيات المحسوبة من اَ حدث

اح َ = اَك — اَس و مح = مك — اس

أو س = سَ — ر و ص = صَ — و

ويلزم وضع هذه المقادير فى القوانين السابقة

(فى تحويل الاحداثيات القطبيه الى اخرى مستقيمة وتعيين الكمية التفاضلية لقوس فى منحن قطبى)

* ١٧٩ * المعادلة المنسوبة الى احداثيات قطبيه تبينها

د(ى و ع) = ٠

ويشاهد اولا كما فى (شكل ٧٩) انه يمكن ابدال ع بمقدارها المستخرج من معادلة

ام٢ = اح٢ + حم٢ أو

ع٢ = س٢ + ص٢ ..... (١٠٢)

وبالنظر الى ى نقسم معادلتى (١٠١) على بعضهما فيوجد

ص/س = جا ى/جتا ى = ظا ى ويستخرج من ذلك

ى = قوس (ظا = ص/س)

وبوضع مقدار ى هذا مع مقدار ع فى معادلة

د(ى و ع) = ٠ يوجد

د[قوس (ظا = ص/س) و √(س٢ + ص٢)] = ٠ (١٠٣)

وهذه

وهذه معادلة مشتملة على س و ص وعلى كمية عالية

* ١٨٠ * ويمكن ايضا ايجاد معادلة بين س و ص غير محتوية على الكمية العالية التى هى قوس (ظا = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$) لكنها تكون مشتملة على كميات تفاضلية ولذلك نأخذ تفاضل معادلة (١٠٣) أو نستعمل الطريقة الآتية حيث كانت هى المعتادة ونرمز برمز د(ع و ے) = ٠ للمعادلة المراد تحويلها الى معادلة ذات احداثيات مستقيمة س و ص والسبب الموجب لبحثنا اولا عن حذف ے من بين معادلة د(ے و ع) = ٠ وتفاضل هذه المعادلة المرموز له برمز د(ے و ع و واے و واع) = ٠ هو كون مقدار ع يمكن بيانه على موجب بند (١٧٩) بمتغيرى س و ص بدون كمية عالية ولا يمكن بيان مقدار ے كذلك وبالحقيقة متى تحذف كمية ے تكون المعادلة الحادثة مشتملة على واے و واع وهذه التفاضلات يمكن بيانها بدلالة متغيرات س و ص و واس و واص هذا ونستخرج من معادلة (١٠١)

$$\text{جتا ے} = \frac{\text{س}}{\text{ع}} \quad \text{و} \quad \text{جا ے} = \frac{\text{ص}}{\text{ع}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١٠٤)$$

ونقسم احدى هاتين المعادلتين على الاخرى فيوجد

$\frac{\text{جا ے}}{\text{جتا ے}}$ أو ظا ے = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ثم نأخذ تفاضل الطرفين فيحدث

$$\frac{\text{واے}}{\text{جتا}^2\text{ے}} = \frac{\text{س واص} - \text{ص واس}}{\text{س}^2}$$

ونبدل $\frac{1}{\text{جتا}^2\text{ے}}$ بمقداره المستخرج من المعادلة الاولى من معادلتى (١٠٤) ثم نسقط القاسم المشترك س^2 فينشأ عن ذلك .

$$\text{ع}^2\text{واے} = \text{س واص} - \text{ص واس}$$ ومنه يستخرج

$$\text{واے} = \frac{\text{س واص} - \text{ص واس}}{\text{ع}^2} \quad \cdots\cdots \quad (١٠٥)$$

وبوضع مقدار ع عوضا عنه فى هذه المعادلة الاخيرة يكون

$$\text{وى} = \frac{\text{س وص} - \text{ص وس}}{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$$

وتفاضل المتغير الآخر يوجد ايضا باعظم سهولة لانه يحدث من معادلة (١٠٢)

$\text{ع} = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ وبأخذ التفاضل يوجد

$$\text{وع} = \frac{\text{س وس} + \text{ص وص}}{\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}}$$

وبواسطة مقادير وى و وع و ع السابقة تتغير المعادلة الحادثة من حذف ى بمعادلة اخرى لا تحتوى الا على س و ص و وس و وص واذن تنتسب الى احداثيات مستقيمة وتكون هى المعادلة المبحوث عنها

* ١٨١ * قد رأينا فى بند (١٠٩) ان كمية تفاضل القوس المرموز له برمز قو المنسوب الى احداثيات مستقيمة هى

$$\text{وقو} = \sqrt{\text{وس}^2 + \text{وص}^2} \quad \cdots\cdots \quad (١٠٦)$$

فيمكن تعيين تفاضل هذا القوس متى تكون الاحداثيات قطبيه وفى هذه الحالة نوضع فى معادلة (١٠٦) مقادير وس و وص المستخرجة من معادلات

$$\text{س} = \text{ع جتا ى} \text{ ، } \text{ص} = \text{ع حا ى}$$

ويوجد باخذ تفاضل هذه المعادلات

$$\text{وس} = -\text{ع حا ى وى} + \text{جتا ى وع}$$
$$\text{وص} = \text{ع جتا ى وى} + \text{حا ى وع}$$

فتربع هذه المعادلات ونختصرها بمساعدة معادلة

$\text{حا}^2\text{ى} + \text{جتا}^2\text{ى} = ١$ فينشأ عن ذلك

$$\text{وقو} = \sqrt{\text{ع}^2\ \text{وى}^2 + \text{وع}^2}$$

وهو تفاضل القوس بدلالة الاحداثيات القطبية

(فى

(فى تحت المماس وتحت العمودى والعمودى والمماس للمنحنيات القطبية)

* ١٨٢ * حقيقة تحت المماس ح ـ (شكل ٨١) فى المنحنيات ذات الاحداثيات المستقيمة هو الجزء المحصور بين موقع ح للراسى وبين نقطة ـ التى يقطع فيها خط اـ العمودى على هـذا الراسى مماس مط وهذا التعريف يتماد فى المنحنيات القطبية التى ليس الراسى فيها حم ولكنه النصف قطر الاحتراقى ام فتحت المماس يكون حينئذ عمود اط المحصور بين نقطة ا ونقطة ط التى يقطع فيها المماس هذا العمود ويعلم من ذلك ان تحت المماس يأخذ فى المنحنيات القطبية موضعا يخالف ما يأخـذه فى المنحنيات غير القطبية وهـذا واضح حيث ان تحت المماس فى المنحنيات غير القطبية يعد دائما على محور الآفاق بخلاف ما اذا كانت المنحنيات قطبية فانه يتغير فى الموضع فى كل نقطة من المنحنى لان محور الآفاق المذكور لا يوجد هنالك

* ١٨٣ * نبحث الآن عن الكمية الحسابية لتحت المماس فى المنحنيات القطبية ولذلك نفرض ان ام و امَ يكونان نصفى قطرين احتراقيين (شكل ٨٢) ثم نرسم من نقطة م خط مح عمودا على نصف القطر الاحتراقى امَ ونرسم اط موازيا لهذا العمود فيحدث من تشابه مثلثى اطمَ و حممَ هذا التناسب

حمَ : حم :: امَ : اط

الذى يستخرج منه $$\text{اط} = \frac{\text{امَ} \times \text{حم}}{\text{حمَ}}$$

وبمراعاة كون حم هو أحد اضلاع مثلث حممَ القائم الزاوية يصير مقدار اط هذا

$$\text{اط} = \frac{\text{امَ} \times \text{حم}}{\sqrt{\text{ممَ}^2 - \text{حم}^2}}$$

وفى حالة التحديد والنهاية يكون امَ مساويا ام يعنى ع وينطبق حم على قوس مهـ ووتر ممَ على قوس ممَ ويصير اط تحت

المماس ولم يبق حينئذ الا البحث عن مقداري مَ م و م ق في حالة التحديد فالاول ليس الا تفاضل قوس المنحني فيكون على موجب بند (١٨١)

مَ م = √ ع' وس' + وع'

والثاني وهو م ق يبحث عنه بالكيفية الآتية وهو أن يقال حيث انه يحدث من تطاعي ار رَ و ام ق هذا التناسب

ار : ر رَ :: ام : م ق أو

ا : ر رَ :: ع : م ق

يكون م ق = ع × ر رَ وهذه الكمية تؤول في حالة التحديد الى ع وس فنضع مقادير م ق و م مَ هذه في مقدار اط بعد أن يغير امَ بكمية ع و ع م بكمية م ق ونختصر فنجد

اط = ع' وس / وع وهي كمية تحت المماس

* ١٨٤ * ولتعيين تحت العمودي نراعي انه حيث كان عمودي ع م (شكل ٨١) عموديا على المماس فرأسي ام يكون وسطا متناسبا بين تحت المماس وتحت العمودي ومن أجل ذلك يوجد

اط : ام :: ام : تحت العمودي أو

ع' وس / وع : ع :: ع : تحت العمودي ومنه يستخرج

تحت العمودي = وع / وس

وبالنظر الى الخط العمودي والخط المماس نراعي مثلثي م ا ع و م ا ط القائمي الزاوية فيحدث لنا منهما

م ع = √ م ا' + ا ع' و م ط = √ م ا' + ا ط'

ثم نضع في هاتين المعادلتين مقادير م ا و ا ع و اط فيوجد العمودي

العمودى $= \sqrt{ع^٢ + \frac{وع^٢}{وى^٢}}$ و المماس $= ع \sqrt{١ + ع^٢ \frac{وى^٢}{وع^٢}}$

* ١٨٥ ولايجاد المقدار الحسابى للقطاع فى المنحنيات القطبية تنظر مثلث ام َم (شكل ٨٢) فيحدث منه

مساحة ام َم $= \frac{ام َ \times ع م}{٢}$

وفى النهاية تكون مساحة مثلث ام َم (شكل ٨٢) عبارة عن مساحة قطاع عنصرى وعمود ع م يتغير بقوس م ن الذى وجدناه يساوى ع وى و ام َ يؤول الى ع فنضع هذه المقادير فى المعادلة السابقة فنجد

مساحة القطاع العنصرى $= \frac{ع^٢ وى}{٢}$

و يمكن ايضا بيان القطاع العنصرى بدلالة الاحداثيات المستقيمة لانه بوضع مقادير ع و وى المستخرجة من معادلات (١٠٢) و (١٠٥) فى هذه المعادلة تصير

مساحة القطاع العنصرى $= \frac{س وص - ص وس}{٢}$ وهو المراد بيانه

(فى تعين كمية نصف قطر الانحنا فى منحن قطبى)

* ١٨٦ * قد بينا فى بند (١٤٩) مقدار نصف قطر الانحنا بنسبة الاحداثيات المستقيمة و رفعنا الاشكال بلحوق هذا المقدار باشارة تجعل نق موجبا ولذلك وضعناه هكذا

$$نق = \frac{\left(١ + \frac{وص^٢}{وس^٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{و^٢ص}{وس^٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٠٧)$$

فلمعرفة مقدار نق هذا بدلالة الاحداثيات القطبية لايلزم الا حذف المكررات التفاضلية الداخلة فى هذا المقدار بواسطة المعادلات الآتية وهى

$س = ع$ جتاى و $ص = ع$ حاى

ولذلك نأخذ تفاضل هذه المعادلات ثم نقسم النواتج الحادثة على بعضها فيحدث لنا

$$\frac{وص}{وس} = \frac{وع\ حاى + ع\ جتاى\ وى}{وع\ جتاى - ع\ حاى\ وى}$$

ونرمز لكميتى هذا الكسر برمزى $م$ و $ن$ فنجد

$$\left.\begin{array}{l} م = وع\ حاى + ع\ جتاى\ وى \\ ن = وع\ جتاى - ع\ حاى\ وى \end{array}\right\} \cdots\cdots (١٠٨)$$

واذن يكون

$$\frac{وص}{وس} = \frac{م}{ن} \cdots\cdots\cdots (١٠٩)$$ أو

$$\frac{وص^{٢}}{وس^{٢}} = \frac{م^{٢}}{ن^{٢}}$$

وبواسطة هذه المعادلة يوجد بخصوص بسط مقدار نق

$$\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}} = \left(\frac{ن^{٢} + م^{٢}}{ن^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}$$

ثم نرفع كل كمية من كميتى هذا الكسر الى قوة $\frac{٣}{٢}$ والقوة $\frac{٣}{٢}$ لكمية $ن^{٢}$ هى $ن^{٣}$ فنجد

$$\left(١ + \frac{وص^{٢}}{وس^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}} = \frac{(ن^{٢} + م^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{ن^{٣}} \cdots\cdots\cdots (١١٠)$$

ونأخذ تفاضل معادلة (١٠٩) فيوجد

$$\frac{و^{٢}ص}{وس} = \frac{ن\ وم - م\ ون}{ن^{٢}}$$

ثم نقسم الطرف الأول لهذه المعادلة على $وس$ والطرف الثانى على $ن$ المكافئة الى $وس$ فنجد

$$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{\text{ه ءم} - \text{م ءه}}{\text{ه}^{٢}} \quad \cdots\cdots \quad (١١١)$$

و بواسطة المقادير المعلومة بمعادلتى (١١٠) و (١١١) تؤول معادلة (١٠٧)

$$\text{الى} \qquad \text{نق} = \frac{(\text{ه}^{٢} + \text{م}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\text{ه ءم} - \text{م ءه}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١١٢)$$

ولم يبق حينئذ الا تحويل هذه المعادلة الى دالة المتغيرى ے و ع ولذلك يعين اولا مقدار $\text{ه}^{٢} + \text{م}^{٢}$ باضافة مربعات معادلات (١٠٨) على بعضها وباختصار الناتج بمساعدة معادلة $\text{حا}^{٢}\text{ے} + \text{جتا}^{٢}\text{ے} = ١$ فيوجد

$$\text{ه}^{٢} + \text{م}^{٢} = \text{ءع}^{٢} + \text{ع}^{٢}\ \text{ءے}^{٢} \quad \cdots\cdots \quad (١١٣)$$

وبالنظر الى مقام معادلة (١١٢) نأخذ تفاضل معادلات (١٠٨) على التعاقب باعتبار ءے كمية ثابتة ثم نضرب الناتج الاول فى ه والثانى فى م فنجد

$$\text{ه ءم} = \text{ه ء}^{٢}\text{ع حاے} + ٢\,\text{ه ءع جتاے ءے} - \text{ه ع حاے ءے}^{٢}$$

$$\text{م ءه} = \text{م ء}^{٢}\text{ع جتاے} - ٢\,\text{م ءع حاے ءے} - \text{م ع جتاے ءے}^{٢}$$

وحين نطرح المعادلة الثانية من الاولى يوجد

$$\left.\begin{aligned} \text{ه ءم} - \text{م ءه} &= \text{ء}^{٢}\text{ع}(\text{ه حاے} - \text{م جتاے}) \\ &+ ٢\,\text{ءع ءے}(\text{ه جتاے} + \text{م حاے}) \\ &- \text{ع ءے}^{٢}(\text{ه حاے} - \text{م جتاے}) \end{aligned}\right\} \quad (١١٤)$$

واذا ضربنا ثانية معادلتى (١٠٧) فى جاے والاولى فى جتاے وطرحناهما من بعضهما واختصرنا الناتج بواسطة معادلة $\text{حا}^{٢}\text{ے} + \text{جتا}^{٢}\text{ے} = ١$ نجد

$$\text{ه حاے} - \text{م جتاے} = - \text{ع ءے}$$

وبعمل مشابه لهذا العمل يوجد

$$\text{ه جتاے} + \text{م جاے} = \text{ءع}$$

واذا وضعت هذه المقادير فى معادلة (١١٤) صارت تلك المعادلة

$$\text{ه ءم} - \text{م ءه} = - \text{ع ء}^{٢}\text{ع ءے} + ٢\,\text{ءع}^{٢}\text{ءے} + \text{ع}^{٢}\text{ءے}^{٣} \quad (١١٥)$$

وبواسطة المقادير التى تعينت يعنى (١١٣) و (١١٥) تتغير معادلة (١١٢) بمعادلة

$$\text{نق} = \frac{(\text{ىع}^{2} + \text{ع}^{2}\,\text{ىح}^{2})^{\frac{3}{2}}}{2\,\text{ىع}^{2}\,\text{ىح} - \text{ع}\,\text{ى}^{2}\text{ع}\,\text{ىح} + \text{ع}^{2}\,\text{ىح}^{3}}$$ وهى المطلوبة

(فى المنحنيات العالية)

* ١٨٧ * تسمى بهذا الاسم المنحنيات التى تحتوى معادلاتها على كميات عالية او مكررات تفاضلية وعلى العموم جميع المنحنيات التى لا يمكن أن تتبين معادلاتها بعدد محدود من الحدود الجبرية يقال لها منحنيات عالية ولنبين الشهير من هذه المنحنيات فنقول

(فى حلزونى ارشميدس أو كونون)

* ١٨٨ * اذا دار نصف قطر اب (شكل ٣٧) حول مركز ا وكانت نقطة ا تتحرك على هذا المستقيم تحركا مستقيما بحيث تأتى فى منتهاه وهو نقطة ب عند تمام دورته بعد ان كانت فى ابتداء التحرك فى مركز ا رسمت تلك النقطة فى هذا التحرك خطا منحنيا هو حلزونى ارشميدس ولكن اب = نق , قوس به = ح , ام = ع فيوجد من بعد التعريف السابق

ام : اه :: قوس هب : بحدب أو

ع : نق :: ح : ٢ط نق ومنه يستخرج

$$\text{ع} = \frac{\text{ح}}{2\text{ط}}$$

وهذا المنحنى ليس له احداثيات مستقيمة على ما يشاهد فاذا دار اب دورة تامة كان قوس هب المحيط ويكون حينئذ ح = ٢ط نق ومن ثمة تؤول المعادلة السابقة الى

$$\text{ع} = \frac{2\text{ط نق}}{2\text{ط}} \quad \text{أو} \quad \text{ع} = \text{نق}$$

واذا استمرت نقطة ا فى تحركها على الاتساق رسم نصف قطر اب

دورة

دورة ثانية حول مركز ا واذا أخذ ـ ـ ـ = ـ ا كانت النقطة المتحركة واقعة فى ـ فى آخر هـذه الدورة الثانية وتكون حينئذ ـ مساوية الى ٤ ط نق وبذلك تؤول معادلة

$$ع = \frac{ـ}{٢ط} \text{ الى } ع = ٢ \text{ نق وهلم جرا}$$

(فى الحلزونى اللوغاريتمى)

* ١٨٩ * الحلزونى اللوغاريتمى هو منحن قطبى فيه زاوية ام ط (شكل ٨١) الحادثة بين نصف قطر ام الاحتراقى وبين خط م ط المماس بالمنحنى ثابتة واذن يوجد بالرمز بحرف ح لظل زاوية ام ط

$$\text{ظا ام ط} = ح$$

وحيث انه يحدث من قيام مثلث ط م ا فى ا هذا التناسب

$$١ : \text{ظا ام ط} :: \text{ام} : \text{اط يكون}$$

$$\text{ظا ام ط} = \frac{\text{اط}}{\text{ام}}$$

واذا غيرنا نصف القطر الاحتراقى ام برمز ع و اط بكمية $\frac{ع^٢ و ـ}{و ع}$ الموجودة فى بند (١٨٣) لاجل تحت المماس لمنحن قطبى نجد

$$\text{ظا ام ط أو } ح = \frac{ع و ـ}{و ع} \text{ الذى يستخرج منه}$$

$$\frac{ح و ع}{ع} = و ـ \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١١٦)$$

و بأخذ تكامل هذه المعادلة على ماسيأتى يوجد

$$ح \text{ لوغا } ع = ـ + \text{ثابتة}$$

ولتكن هـ َ أساس الجملة اللوغاريتمية للمهندس نيبير فاذا نظرت ح كلوغاريتم لكمية هـ َ فى جملة لوغاريتمية ما أمكن ابدال ح بكمية لو هـ َ وتكون حينئذ كمية لو هـ َ لوغا ع مبينة لوغاريتم ع

فى هذه الجملة اللوغاريتمية (ولاثبات ذلك نقول حيث ان هـ َ هى أساس الجملة اللوغاريتمية المنسوبة للمهندس نيبير يوجد بالنسبة لهذا الاساس ع = لوعاهع وبأخذ لوغاريتم الطرفين بحسب الجملة اللوغاريتمية المبينة برمز لو يوجد

لو ع = لو (لوعاهع) = لوغا ع لوهـ َ)

واذن يكون لو ع = ح + ثابتة

* ١٩٠ * ويمكن رسم الحلزونى اللوغاريتمى بالنقط بالكيفية الآتية وهى أن تقسم محيط وَوَ َ (شكل ٨٣) الى اقسام متساوية ثم توصل انصاف أقطار الى نقط التقسيم ويقطع عليها اجزاء ام وامَ وامً وامٌ ..الخ التى تكون مكونة متوالية هندسية فنقط م و مَ و مً و مٌ ....الخ تركب حلزونيا لوغاريتميا واثبات ذلك أن يفرض ان اجزاء ممَ و مَمً و مًمٌ .. الخ تكون صغيرة الامتداد بحيث يمكن اعتبارها كخطوط مستقيمة فمثلثات امَمً و امًمٌ و ......الخ تكون بهذا الاعتبار متشابهة لان الزوايا التى فى ا كلها متساوية بالعمل وزوايا ممَا و مَمًا و مًمٌا .... الخ كلها متساوية ايضا من الخاصية الاصلية للمنحنى ومن اجل ذلك توجد هذه التناسبات

ام : امَ :: امَ : امً

امَ : امً :: امً : امٌ

الخ و الخ و الخ و الخ

وذلك يدل على ان راسيات ام و امَ و امً .... الخ توجد فى الحلزونى على متوالية هندسية

* ١٩١ * الخط العمودى فى الحلزونى اللوغاريتمى يساوى نصف قطر الانحنا أبدا وللبرهنة على ذلك نضع فى مقدار نصف قطر الانحنا فى المنحنيات

القطبية

القطبية المتبين فى بند (١٨٦) بهذا الرمز

$$\text{نق} = \frac{(\text{وَع}^{٢} + \text{ع}^{٢}\,\text{وَى}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\text{وَ}^{٢}\text{ع}\,\text{وَى} - \text{ع}\,\text{وَع}\,\text{وَى} + \text{ع}^{٢}\,\text{وَى}^{٢}}$$

مقادير وَع و $\text{وَ}^{٢}\text{ع}$ المستخرجة من معادلة الحلزونى اللوغارتمى عوضا عنها ولذلك نستخرج من معادلة (١١٦)

$$\text{وَع} = \frac{\text{ع}\,\text{وَى}}{\text{ح}} \quad \text{و} \quad \text{وَ}^{٢}\text{ع} = \frac{\text{وَع}}{\text{ح}}\,\text{وَى} = \frac{\text{ع}\,\text{وَى}^{٢}}{\text{ح}^{٢}}$$

ثم نضع هذه المقادير فى مقدار نق فيوجد

$$\text{نق} = \frac{(\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}} = (\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}}$$

واذا وضعت فى كمية الخط العمودى التى هى على ما فى بند (١٨٤)

$$\sqrt{\text{ع}^{٢} + \frac{\text{وَع}^{٢}}{\text{وَى}^{٢}}}$$

مقدار $\frac{\text{وَع}^{٢}}{\text{وَى}^{٢}}$ حدث كذلك $\sqrt{\frac{\text{ع}^{٢}}{\text{ح}^{٢}} + \text{ع}^{٢}}$ ويعلم من ذلك ان الخط العمودى يساوى فى هذا المنحنى نصف قطر الانحناء وحيث ان نصف قطر الانحنا هذا يتجه على هذا الخط العمودى على ما فى بند (١٥٥) ينتج من ذلك ان هذه الخطوط تنطبق على بعضها

* ١٩٢ * وبواسطة هذه الخاصية يثبت ان مفروض الحلزونى اللوغارتمى هو حلزونى لوغارتمى ايضا ولاجل ذلك نعتبر نقطة ن (شكل ٨٤) من الخط العمودى التى هى من نقط نصف قطر الانحناء ايضا اذ هى نهايته الحقيقية وتوجد لا محالة على المفروض ثم نرمز لابعادها القطبية برموز ىَ و عَ فيسهل تعيين هذه الابعاد بدلالة ابعاد ى و ع لنقطة م من المنحنى لانه اذا فرضنا ان وو يكون قوسا من الدائرة

المرسومة بنصف قطر مساو للواحد كانت آفاق نقطتى م و ﻫ تختلف عن بعضها بهذا القوس وبسبب قيام زاوية م ا ﻫ يكون ذلك القوس مساويا الى ربع المحيط ولعدم الخلاف فى المستعملات نبين برمز $\frac{ط}{٢}$ ربع المحيط المرسوم بنصف قطر يساوى الاحد فنجد ىَ = ى + $\frac{ط}{٢}$ وبأخذ تفاضل هذه المعادلة يوجد

$$و ى = و ىَ$$

وغير ذلك حيث ان بعد عَ القطبى لنقطة ﻫ من المفرود يساوى تحت العمودى $\frac{و ع}{و ى}$ للحلزونى اللوغاريتمى نغير $\frac{و ع}{و ى}$ بكمية عَ فى معادلة هذا المنحنى فنجد ع = ح عَ وعلى ذلك يكون و ع = ح و عَ فبوضع مقادير و ى و و ع و ع هذه فى معادلة (١١٦) للحلزونى اللوغاريتمى نجد

$$ح \frac{و عَ}{عَ} = و ىَ$$

وهذه المعادلة متحدة الشكل مع المعادلة السابقة فبها يفهم ان مفرود الحلزونى اللوغاريتمى هو حلزونى آخر لوغاريتمى وهذا ما أردنا بيانه

* (فى الحلزونى الزائدى والحلزونيات الكامنة فى معادلة ع = ح ىـ ن) *

* ١٩٣ * الخاصية التى يتميز بها الحلزونى الزائدى هى ثبوت أو عدم تغير تحت المماس فيه فاذا رمزنا لتحت المماس هذا برمز ح وساويناه بمقدار تحت المماس لمنحن قطبى وهو المتبين فى بند (١٨٣) كانت معادلة هذا المنحنى يعنى الحلزونى الزائدى هكذا

$$ع^{٢} \frac{و ى}{و ع} = - ح$$

واخذت

وأخذت ثابتة ح باشارة الناقص لانه يوجد عند ذلك

$$-\frac{\text{وا}\,ع}{ع^{2}} = \frac{\text{وا}\,ى}{ح}$$

التي هي معادلة يحدث منها من بعد أخذ تكاملها على ماسياتي

$$\frac{1}{ع} = \frac{ى}{ح} + ث$$

وتؤول هذه المعادلة بتغيير كمية ث غير المتعينة بكمية اخرى $\frac{ثَ}{ح}$ غير متعينة الى

$$\frac{1}{ع} = \frac{ى}{ح} + \frac{ثَ}{ح}$$

واذا أخذت النقطة الاصلية او الإبتدائية للآفاق ى بحيث يكون أفق ى + ثَ مساويا الى أفق جديد ى آلت المعادلة السابقة الى

$$\frac{1}{ع} = \frac{ى}{ح} \quad \text{أو وهو الاولى .}$$

$$ع = \frac{ح}{ى} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١١٧)$$

وتبين هذه المعادلة انه يوجد $ع = \infty$ متى يكون $ى = ٠$
وينتج من ذلك ان نصف قطر الاحتراق الموافق الى النقطة التي يكون فيها $ى = ٠$ هو خط مقرب للمنحني

* ١٩٤ * معادلة (١١٧) تبين ايضا ان نصف قطر الاحتراق يناسب للافق عكسا واذا جعلنا $ى = ٢ط$ و $ى = ٤ط$ و $ى = ٦ط$ والخ نجد بخصوص ع هذه المقادير المتوالية $\frac{ح}{٢ط}$ و $\frac{ح}{٤ط}$ و $\frac{ح}{٦ط}$ والخ ويعلم من ذلك ان نصف القطر الاحتراقي يؤول الى نصف ما كان في آخر الدورة الاولى عند تمام دورتين و يؤول الى ثلث ما كان عند تمام ثلاث دورات وهلم جرا نظرا لعدة الدورات التي يدورها حول النقطة القطبية

* ١٩٥ * معادلة الحلزوني الزائدي هي ومعادلة حلزوني ارشميدس ليست الا حالات خصوصية من معادلة $ع = ح ى^{ن}$ لانه

بجعل $ه = ١$ و $ح = \frac{١}{ط^٢}$ تحدث المعادلة الثانية و بجعل $ه = -١$ تحدث الاولى ومن الحلزونيات التى تتبين بهذه المعادلة الحلزونى المكافى وهو الموافق الى فرض $ه = ٢$

(فى اللوغاريتمى)

* ١٩٦ * اللوغاريتمى منحن باحداثيات مستقيمة وفيه الافقى لوغاريتم لرأسيه واذن تكون معادلة هذا المنحنى بهذه الصورة

$س = لوغا\ ص$ ومنها يستخرج

$ص = ح^{س}$ ثم يوجد بواسطة التفاضل

$$\frac{وص}{وس} = ح^{س}\ لوغا\ ح$$

* ١٩٧ * للبحث عن بعض خواص هذا المنحنى نجعل $س = ٠$ فنجد $ص = ١$ واذا أعطينا بعد ذلك مقادير متزائدة وموجبة الى متغير س أخذ متغير ص فى الازدياد واذا أخذ متغير س مقدارا سالبا $-ع$ يوجد $ص = ح^{-ع} = \frac{١}{ح^{ع}}$ ويرى ان الرأسى يتناقص كلما بعد عن النقطة الاصلية فى جهة الآفاق السالبة وان المنحنى لايقابل محور الآفاق الاعلى بعد غير محدود فى الحالة التى تصير فيها معادلة $ص = \frac{١}{ح^{ع}}$ آيلة الى

$ص = \frac{١}{ح^{\infty}} = ٠$ وينتج من ذلك ان امتداد محور الآفاق خط مقترب للمنحنى

* ١٩٨ * اذا أخذت من ابتداء النقطة الاصلية الآفاق المتساوية (شكل ٣٨) $اح = ع$ و $اح' = -ع$ يوجد

$حم = ح^{ع}$ و $ح'م' = \frac{١}{ح^{ع}}$ واذن يكون

$حم \times ح'م' = ١$

١٩٩

* ١٩٩ * الخاصية الشهيرة لهذا المنحنى هى ثبوت اعنى عدم تغير تحت المماس فيه لانه يوجد بأخذ تفاضل معادلة اللوغاريتمى

$$\frac{و ص}{و س} = ص لوغا ح$$ ويستخرج من ذلك

$$\frac{ص و س}{و ص} = \frac{١}{لوغا ح}$$ أو

$$\frac{ص و س}{و ص} = \frac{١}{لوغا ح}$$

وحيث ان الطرف الاول لهذه المعادلة يبين تحت المماس للمنحنى كما فى بند (٦٩) فهو ثابت لمساواته كمية $\frac{١}{لوغا ح}$ الثابتة وهو المراد بيانه

(فى السكلويد)

* ٢٠٠ * السكلويد منحن يرتسم بنقطة م (شكل ٣٩) الكائنة على محيط الدائرة المتدحرجة على مستقيم ر ر ومن المحقق ان جميع نقط قوس ر م تنطبق على التعاقب على مستقيم ر ا فتنطبق نقطة م فى نوبتها على ا فى هذا التحرك الآخذ من ر نحو ح ويكون قوس ر م مساويا لمستقيم ر ا

وحيث كانت جميع النقط التى تمر عليها م فى هذا التدحرج توجد على السكلويد فرضا فنقطة ا تكون كذلك على هذا المنحنى فنأخذها مبدأ للآفاق او نقطة أصلية وننزل عمود م هـ على قطر ر ر ونجعل

ا ح = س و ح م = ص و ر ر = ٢ ح وقوس م ر = ز و م هـ = ع فنجد

ا ح = ا ر ـــ ح ر أو

س = قوس م ر ـــ م هـ أو

س = ز ـــ ع .... (١١٨)

ونبحث اولا عن حذف قوس ز بالكيفية الآتية وهى أن نأخذ تفاضل

بالمعادلة السابقة فيوجد

$$وس = ور - وع \quad \cdots\cdots \quad (١١٩)$$

ولايجاد مقدار ور بدلالة ع نراعى انه يوجد بين ع و ز هذا التعادل

$$ع = جاز$$

وباخذ تفاضل هذه المعادلة على مافى بند (٤٢) يوجد

$$وع = وز \frac{جتار}{ح}$$ ومنه يستخرج

$$ور = \frac{ح وع}{جتاز}$$

ويلزم تغيير مقدار جتاز فى هذه المعادلة بالمقدار الذى يحدث من معادلة

$$جا^٢ر + جتا^٢ر = ح^٢$$ أو وهو الاولى

$$ع^٢ + جتا^٢ر = ح^٢$$

ويحدث بذلك

$$ور = \frac{ح وع}{\sqrt{ح^٢ - ع^٢}}$$

وبوضع هذا المقدار فى معادلة (١١٩) يكون

$$وس = \frac{ح وع}{\sqrt{ح^٢ - ع^٢}} - وع \quad \cdots\cdots \quad (١٢٠)$$

ولم يبق الا بيان ع بدلالة ص ولاجل ذلك نفرض ان و يكون مركز الدائرة الراسمة سم (شكل ٣٩) فنجد

$$وه = \sqrt{مو^٢ - مه^٢}$$ أو

$$ح - ص = \sqrt{ح^٢ - ع^٢} \quad \cdots\cdots \quad (١٢١)$$

وبتربيع هذه المعادلة واختصارها يستخرج منها

$$ع = \sqrt{٢ح ص - ص^٢} \quad \cdots\cdots \quad (١٢٢)$$

وباخذ

وباخذ التفاضل يكون

$$\text{وا}\,\text{ع} = \frac{(\text{ح} - \text{ص})\,\text{وا}\,\text{ص}}{\sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}} \quad \cdots\cdots \quad (\text{١٢٣})$$

ثم تؤول معادلة (١٢٠) بواسطة معادلتى (١٢١) و (١٢٣) الى

$$\text{وا}\,\text{س} = \frac{\text{ح}\,\text{وا}\,\text{ص}}{\sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}} - \frac{(\text{ح} - \text{ص})\,\text{وا}\,\text{ص}}{\sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}}$$

وباختصار هذه يوجد

$$\text{وا}\,\text{س} = \frac{\text{ص}\,\text{وا}\,\text{ص}}{\sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}}$$ وهى معادلة السكاويد

* ٢٠١ * ويمكن ايضا بيان معادلة السكاويد بدلالة القوس بالكيفية الآتية وهى ان تستخرج من معادلة ع = جا ر

ر = قوس (جا = ع)

ثم نضع فى هذه المعادلة عوضا عن ع مقدارها المستخرج من معادلة (١٢٢) فنجد

$$\text{ر} = \text{قوس}\left(\text{جا} = \sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}\right)$$

وحين يوضع هذا المقدار ومقدار ع فى معادلة (١١٨) يكون

$$\text{س} = \text{قوس}\left(\text{جا} = \sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}\right) - \sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}} \quad \cdot\cdot \quad (\text{١٢٤})$$

والجيب هنا يطابق الى نصف قطر ح واما الجيب من الجدول الذى نصف القطر فيه واحد فانه يكون $\frac{\sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}}{\text{ح}}$

واذا أريد ادخال هذا الجيب يجب وضع

$$\text{س} = \text{ح} \times \text{قوس}\left(\text{جا} = \frac{\sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}}{\text{ح}}\right) - \sqrt{\text{٢ح ص} - \text{ص}^{٢}}$$

* ٢٠٢ * وللبحث عن بعض خواص هذا المنحنى نثبت اولا ان ص لا تكون سالبة ولا اكبر من ٢ح لانه اذا جعل ص = ــ ص

تؤول كمية قوس ($جا = \sqrt{٢ م ص - ص^٢}$) الى قوس ($جا = \sqrt{- ٢ م صَ - صَ^٢}$) وهى كمية تخيلية وثانيا اذا جعل ص = ٢ م + ل آلت كمية قوس ($جا = \sqrt{٢ م ص - ص^٢}$) الى قوس ($جا = \sqrt{- ٢ م ل - ل^٢}$) وهو مقدار تخيلى ايضا فاذن يكون المنحنى محصورا بين متوازيى م ى و ا ب بعد ا ب (شكل ٤٠) موازيا الى م ى على بعد ه ف = ٢ م عن محور الآفاق

واكبر مقدار يكون لمتغير ص هو ٢ م لانه اذا دحرجت الدائرة الراسمة من ا نحو م (شكل ٤١) أخذت نقطة م التى كانت أولا فى ا فى الارتفاع على الولا الى ان تصير فى ب التى هى طرف قطر ب ى فيكون عندذلك افق اى مساويا الى ى ه ب يعنى نصف محيط الدائرة الراسمة

وهذا الناتج يطابق مايحدث من معادلة (١٢٤) حيث انه بجعل ص = ٢ م فيها يوجد س = قوس ($جا = ٠$) والقوس الذى جيبه صفر هو احد هذه القسى ٠ و ى ه ب و ٢ ى ه ب و ٣ ى ه ب و الخ ويرى ان القوس فى هذه الحالة هو ى ه ب

ويعلم من ذلك انه حين تأتى نقطة م فى ب تكون قد رسمت قوس ا ب من السكلويد فاذا استمرت هذه النقطة فى تحركها رسمت قوسا آخر ب م مشابها للاول وبالجملة متى استمرت الدائرة الراسمة فى تدحرجها على محور الآفاق حدثت نقطة م قسيا من السكلويد لا حصر لعددها وهى م بَ مَ و مَ بً مً .... الخ انظر (شكل ٤٢) ويمكن أن تتحرك الدائرة الراسمة فى جهة ا نحو اً وتحدث نقطة م حينئذ اقواسا غير محصورة العدد ا بَ اَ و اَ بً اً .... الخ وجملة الاقواس الموجودة فى الجهة المرادة هى المركبة للسكلويد

* ٢٠٣ * الخط العمودى فى النقطة التى ابعادها س و ص (شكل ٤٣) متعين على ما فى بند (٧٠) بهذا القانون

العمودى

العمودى $=$ صہ $\sqrt{\frac{وا صہ^٢}{وا سہ^٢} + ١}$

فاذا وضعنا فى هذا القانون مقدار $\frac{وا صہ}{وا سہ}$ المستخرج من معادلة السكلويد نجد

العمودى $=$ صہ $\sqrt{\frac{٢ ح صہ - صہ^٢}{صہ^٢} + ١} = \sqrt{٢ ح صہ}$

ولاجل رسم هذا المقدار نوصل وتر مد (شكل ٤٣) فنجد

ده : مد :: مد : دسہ أو

صہ : مد :: مد : ٢ح ومنها يحدث

وتر مد $= \sqrt{٢ ح صہ}$

وحيث ان زاوية سہمد قائمة من خاصية الدائرة فوتر مسہ يكون عمودا على الخط العمودى مد فى طرفه ويعلم من ذلك ان وتر مسہ الممدود يمس السكلويد فى نقطة م لان الخط المماس والخط العمودى يشكلان بينهما زاوية قائمة ابدا

واذن يمكن امتداد الخط المماس للسكلويد فى نقطة م برسم نصف الدائرة الراسمة مسہد ومد وتر سہم ولعدم تشكيل هذه الدائرة الراسمة فى كل نقطة من المنحنى يكفى رسم نصف الدائرة الراسمة على اكبر الراسيات وهو سہد (شكل ٤٤) ومد خط مه من النقطة المفروضة م عمودا على سہد ووصل وتر سہح فخط مط المرسوم من نقطة م موازيا لهذا الوتر يكون هو المماس المطلوب وذلك لم يكن الا نتيجة من السابق

* ٢٠٤ * لمعرفة مقدار نصف قطر الانحنا للسكلويد يلزم أن تستخرج مقادير $\frac{وا صہ}{وا سہ}$ و $\frac{وا^٢ صہ}{وا سہ^٢}$ من معادلة هذا المنحنى ثم توضع تلك المقادير فى كمية نصف قطر الانحنا التى هى

$$\text{نق} = - \frac{\left(1 + \frac{\text{وص}^2}{\text{وس}^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}} \quad \text{على ما في بند} \ (١٥٠)$$

المأخوذة باشارة سالبة لانا نعلم ان هذا المنحنى يتقعر نحو محور الافاقى هذا ويحدث اولا من معادلة السكلويد

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\sqrt{٢\text{حص} - \text{ص}^2}}{\text{ص}} \quad \ldots\ldots \quad (١٢٥)$$

ولايجاد $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ نجعل $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \text{ع}$ فنجد ايضا

$$\text{ع} = \frac{\sqrt{٢\text{حص} - \text{ص}^2}}{\text{ص}} = \sqrt{\frac{٢\text{ح}}{\text{ص}} - ١}$$

و بأخذ التفاضل على ما في بند (٢٣) يوجد

$$\text{وع} = - \frac{\frac{٢\text{ح}}{\text{ص}^2}\,\text{وص}}{٢\sqrt{\frac{٢\text{ح}}{\text{ص}} - ١}} = - \frac{\text{ح وص}}{\text{ص}\sqrt{٢\text{حص} - \text{ص}^2}}$$

واذن يكون

$$\frac{\text{وع}}{\text{وص}} = - \frac{\text{ح}}{\text{ص}\sqrt{٢\text{حص} - \text{ص}^2}}$$

ثم نضرب بهذه المعادلة في معادلة (١٢٥) فنجد على ما في بند (٢٤):

$$\frac{\text{وع}}{\text{وس}} = - \frac{\text{ح}}{\text{ص}^2} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2} = - \frac{\text{ح}}{\text{ص}^2}$$

وبواسطة هذه المقادير تؤول كمية نصف قطر الانحنا الى

$$\text{نق} = \frac{\left(\frac{٢\text{ح}}{\text{ص}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ح}}{\text{ص}^2}} = \frac{(٢\text{ح})^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{ح}\,\text{ص}^{\frac{3}{2}}}{\text{ص}^2}} = \frac{٢^{\frac{3}{2}}\,\text{ح}^{\frac{1}{2}}}{\text{ص}^{-\frac{1}{2}}}$$

و بجعل

و بجعل $ص$ فى البسط يكون

$$نق = ٢ \, ح^{\frac{١}{٢}} \, ص^{\frac{١}{٢}} = ٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}} \, ح^{\frac{١}{٢}} \, ص^{\frac{١}{٢}} = ٣\sqrt{٢ \, ح \, ص}$$

و يعلم من ذلك ان نصف قطر الانحناء $م م'$ (شكل ٤٥) للسكلويد هو ضعف الخط العمودى $م ر$

* ٢٠٥ * وتستخرج معادلة المفروض بوضع مقادير

$\frac{ء ص}{ء س}$ و $\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}$ فى قوانين بند (١٤٩) التى هى

$$ص - و = - \frac{١ + \frac{ء ص^٢}{ء س^٢}}{\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}}$$

$$س - ر = \frac{\left(١ + \frac{ء ص^٢}{ء س^٢}\right) \frac{ء ص}{ء س}}{\frac{ء^٢ ص}{ء س^٢}} = - (ص - و) \frac{ء ص}{ء س}$$

فيوجد

$$ص - و = \frac{\frac{٢ ح}{ص}}{\frac{ح}{ص^٢}} = ٢ ص$$

$$س - ر = - ٢ \sqrt{٢ ح ص - ص^٢}$$

واذن يكون

$$و = - ص \quad و \quad ر = س + ٢ \sqrt{٢ ح ص - ص^٢}$$

او (شكل ٤٦)

$$ك م' = م ح \quad و \quad ر = ا ح + ٢ م هـ$$

فا ۲۱ (٤١)

وبمراعاة كون اح + مه = ار = قوس مر يمكن وضع المعادلة الاخيرة هكذا

ر = قوس مر + مه ..... (١٢٦)

واذا مددنا سر وأخذنا رل = سر = ٢ح ورسمنا نصف محيط رمَل على رل مرّ هذا النصف محيط بنقطة مَ بسبب تساوى وترى مَر و مر ويوجد اذذاك

قوس مر = قوس مَر و مه = مَهَ

فنضع هذه المقادير فى معادلة (١٢٦) فيوجد

ر = قوس مَر + مَهَ واذن يكون

ر = قوس مَر + √(٢حو ــ و٢) ...... (١٢٧)

وهذه هى المعادلة التى توجد بين ابعاد اك = ر و كمَ = و لنقطة ما مَ من المفروض فنطوّل الآن الرأسى حد = ٢ح (شكل ٤٦) بكمية دا' مساوية ايضا الى ٢ح ونرسم من نقطة ا' خط ا'ءَ موازيا لخط اد وتحوّل النقطة الاصلية ا فى ا' وليكن لاجل ذلك
ا'كَ = رَ و كَمَ = وَ فنجد لاجل الافق ا'كَ = اد ــ اك أو

رَ = ½ المحيط الراسم ــ اك أو

رَ = طح ــ ر

وبالنظر الى الرأسى وَ يوجد

مَكَ = ا'ء ــ كمَ أو

وَ = ٢ح ــ و

ويستخرج من هذه المعادلات

ر = طح ــ رَ و و = ٢ح ــ وَ

وبواسطة هذه المقادير تؤول معادلة (١٢٧) الى

طح ـ رَ = قوس مَر + √(٢حوَ ـ وَ٢) أو

طح ـ رَ = قوس رمَل ـ قوس مَل + √(٢حوَ ـ وَ٢)

= طح ـ قوس مَل + √(٢حوَ ـ وَ٢)

وعلى ذلك يكون

رَ = قوس مَل ـ √(٢حوَ ـ وَ٢)

وهذه المعادلة هى معادلة سكلويد فيعلم من ذلك ان مفرود السكلويد سكلويد اخر

* ٢٠٦ * ويمكن الاثبات بالوجه الآتى على ان المفرود اأ َ (شكل ٤٦) سكلويد ولذلك نقول عندنا

قوس لمَ + قوس رمَ = طح فيكون

قوس لمَ = طح ـ قوس رمَ

وغير ذلك

قوس رمَ = قوس مر = ار كما فى بند (١٩٩)

فاذا وضعنا هذا المقدار فى المعادلة السابقة حدث

قوس لمَ = طح ـ ار = اد ـ ار أو

قوس لمَ = لاَ

وهذه هى خاصية السكلويد

(فى تغيير المتغير غير المعلق)

* ٢٠٧ * متى يفرض قانون مشتملا على مكررات تفاضلية فلا يمكن حذف تلك المكررات الا بمساعدة معادلة المنحنى الذى يراد تطبيق هذا القانون عليه ومثاله آن يطلب مايؤول اليه قانون

$$\frac{\left(1+\frac{و^{٢}ص}{و س^{٢}}\right)\frac{وص}{وس}}{\frac{و^{٢}ص}{وس^{٢}}}$$

متى يكون المنحنى قطعا مكافئا فانه يلزم أن يستخرج من معادلة القطع المكافئ التى هى $ص = ح س^٢$ مقادير $\frac{وا ص}{وا س}$ و $\frac{وا^٢ ص}{وا س^٢}$ ثم توضع هذه المقادير فى ذلك القانون لتحذف المكررات التفاضلية حينئذ و اذا نظرت كميات $\frac{وا ص}{وا س}$ و $\frac{وا^٢ ص}{وا س^٢}$ كمجهولة يلزم غالبا معادلتان لحذفهما من اى قانون كان وتدرك هاتان المعادلتان باخذ تفاضل معادلة المنحنى مرتين على التوالى

* ٢٠٨ * متى تزال $وا س$ بواسطة العمليات الجبريه من أن تكون موجودة تحت $وا ص$ كما فى القانون الآتى

$$\frac{ص(وا س^٢ + وا ص^٢)}{وا س^٢ + وا ص^٢ - ص وا^٢ ص} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١٢٨)$$

فالوضع يفعل بنظر كميات $وا س$ و $وا ص$ و $وا^٢ ص$ كمجهولة وحيث انه يلزم لحذفها على العموم معادلات عدتها كعدتها فلا يتراءى اولا ان الحذف ممكن حيث كان تفاضل معادلة المنحنى لا يحدث الا معادلتين بين $وا س$ و $وا ص$ و $وا^٢ ص$ لكن يلزم التأمل انه حين تحذف $وا ص$ و $وا^٢ ص$ بواسطة هاتين المعادلتين يوجد فى القانون مضروب مشترك $وا س^٢$ ينحذف و يسقط فاذا كان المنحنى قطعا مكافئا معادلته $ص = ح س^٢$ مثلا فانه بأخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين بالتوالى يوجد

$$وا ص = ٢ ح س وا س \quad و \quad وا^٢ ص = ٢ ح وا س^٢$$

و بوضع هذه المقادير فى قانون (١٢٨) يوجد بعد اسقاط المضروب المشترك $وا س^٢$

$$\frac{ص(١ + ٤ ح^٢ س^٢)}{١ + ٤ ح^٢ س^٢ - ٢ ح ص}$$

* ٢٠٩ *

* ٢٠٩ * ويمكن بسهولة ادراك السبب فى صيران $وس^{2}$ مضروبا مشتركا لانه متى يحذف مقام $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ فى القانون الذى كان محتويا اولا على $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ و $\frac{وص}{وس}$ تكتسب جميع الحدود ماعدا المحتوية على $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ و $\frac{وص}{وس}$ مضروبا مشتركا $وس^{2}$ وحينئذ لاتحتوى الحدود التى كانت متبوعة بكمية $\frac{و^{2}ص}{وس^{2}}$ على $وس$ بخلاف الحدود التى كانت متبوعة بكمية $\frac{وص}{وس}$ فانها تحتوى على $وس$ برتبة اولى لان حاصل ضرب $\frac{وص}{وس}$ فى $وس^{2}$ يؤول الى $وص\,وس$ ومتى يؤخذ تفاضل معادلة المنحنى بعد ذلك وتحدث نواتج بهذه الصورة $وص = م\,وس$ و $و^{2}ص = ن\,وس^{2}$ وتوضع هذه المقادير فى الحدود المحتوية على $و^{2}ص$ و $وص$ تتغير تلك الحدود كالحدود الباقية بحواصل ضروب للكمية $وس$

* ٢١٠ * وماذكرناه بخصوص القانون الذى يحتوى على التفاضلات برتبة أولى وثانية يمكن تطبيقه على القوانين التى توجد فيها هذه التفاضلات برتبة أعلا من ذلك وينبنى عليه انه بأخذ تفاضل معادلة المنحنى مرارا على قدر اللازم يمكن دائما حذف التفاضلات المحتوى عليها القانون المفروض

* ٢١١ * ولا يكون كذلك اذا احتوى القانون المفروض حدودا فيها $وس^{2}$ و $و^{3}س$ و الخ زيادة على التفاضلات التى اعتبرناها

لانه اذا فرضنا مثلا انه يكون داخلا فى هذا القانون التفاضلات $\text{و}\,\text{س}$, $\text{و}\,\text{ص}$ و $\text{و}^{٢}\text{س}$ و $\text{و}^{٢}\text{ص}$ واخذنا تفاضل المعادلة المتبينة برمز $\text{ص} = \text{د}\,\text{س}$ مرتين على التوالى حدث منهما المعادلتان

$$\text{ى}(\text{س}\,،\,\text{ص}\,،\,\text{و}\,\text{س}\,،\,\text{و}\,\text{ص}) = ٠ \quad \text{و} \quad \text{ى}(\text{س}\,،\,\text{ص}\,،\,\text{و}\,\text{س}\,،\,\text{و}\,\text{ص}\,،\,\text{و}^{٢}\text{ص}\,،\,\text{و}^{٢}\text{س})$$

ولا يمكن بهاتين المعادلتين الا حذف اثنين من التفاضلات $\text{و}\,\text{ص}$ و $\text{و}^{٢}\text{س}$ و $\text{و}^{٢}\text{ص}$ الثلاث ويشاهد عدم امكان حذف جميع التفاضلات الداخلة فى القانون المفروض ويوجد اذن فى هذه الحالة شرط مقدر متبين بالتفاضل $\text{و}^{٢}\text{س}$ وهذا الشرط هو أن متغير س معتبر بنفسه كدالة لمتغير ثالث لا يظهر فى القانون ويسمى بالمتغير غير المعلق ويصير ذلك فى غاية الوضوح اذا لوحظ كون معادلة $\text{ص} = \text{د}\,\text{س}$ يمكن اشتقاقها من جملة معادلتى

$$\text{س} = \text{ى}\,\text{ے} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{د}\,\text{ے}$$

اللازم حذف ے من بينهما ولذا تؤول معادلة $\text{ص} = \text{ح}\,\frac{(\text{س} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ الى جملة معادلتى

$$\text{س} = \text{ب}\,\text{ے} + \text{هـ} \quad \text{و} \quad \text{ص} = \text{ح}\,\text{ے}^{٢}$$

ويدرك ان س و ص يجب أن يتغيرا على مقتضى الزيادة التى يمكن ان تأخذها كمية ے ولكن هذه الفرضية يعنى كون س و ص يتغيران من بعد الزيادة المفروضة لمتغير ے تقتضى وقوع معادلات بين س و ے وبين ص و ے واحدى هذه المعادلات تكون بالاختيار لانه اذا فرض ان المعادلة التى نرمز لها على العموم برمز $\text{ص} = \text{د}\,\text{س}$ تكون $\text{ص} = \text{ح}\,\frac{(\text{س} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ مثلا ونظمت بين ے و س معادلة $\text{س} = \frac{\text{ے}^{٣}}{\text{هـ}^{٢}}$ الحيث ما اتفقت ووضع هذا المقدار فى معادلة $\text{ص} = \text{هـ}\,\frac{(\text{س} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}$ غيرها الى معادلة

صيغ

$\text{ص} = \text{ح}\,\frac{(\text{ـے}^{٣} - \text{هـ}^{٣})^{٢}}{\text{ـے}^{١}\,\text{هـ}^{٤}}$ التى اذا وفقت مع $\text{س} = \frac{\text{ـے}^{٢}}{\text{هـ}^{٢}}$
احدثت بواسطة الحذف $\text{ص} = \text{ح}\,\frac{(\text{س} - \text{هـ})^{٢}}{\text{ـے}^{٢}}$ وهو الشرط الواجب
مراعاته فى انتخاب متغير ـے

* ٢١٢ * واذن يمكن تعيين متغير ـے غير المعلق بالاختيار فيؤخذ له وتر أو قوس أو أفق أو رأسى مثلا فاذا بين ـے قوسا من المنحنى يجب أن يوجد $\text{و ـے} = \sqrt{\text{و س}^{٢} + \text{و ص}^{٢}}$
واذا كانت ـے تبين وترا وكانت النقطة الاصلية رأس المنحنى يكون $\text{ـے} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$ واخيرا يمكن ان تكون ـے الافقى اوالراسى ويوجد عند ذلك ـے = س او ـے = ص

* ٢١٣ * قد يكون انتخاب أحد هذه الفروضات اوغيرها ضروريا لاجل أن يكون القانون المشتمل على التفاضلات عاريا عنها اى عن هذه التفاضلات والغالب انه اذا لم يفعل هذا الانتخاب يفرض تقديرا ان المتغير غير المعلق كان متعينا ومثاله ان الفرضية فى الحالة المعتادة التى لا يحتوى القانون فيها الاعلى تفاضلات و س و و ص و $\text{و}^{٢}\text{ص}$ و $\text{و}^{٣}\text{ص}$ و الخ هى ان متغير ـے غير المعلق كان مأخوذا لاجل الافقى لانه ينتج من ذلك حينئذ

$$\text{ـے} = \text{س} \quad \text{و} \quad \frac{\text{و س}}{\text{و ـے}} = ١ \quad \text{و} \quad \frac{\text{و}^{٢}\text{س}}{\text{و ـے}^{٢}} = ٠ \quad \frac{\text{و}^{٣}\text{س}}{\text{و ـے}^{٣}} = ٠ \quad \text{الخ}$$

ويرى ان القانون لا يشتمل على التفاضلات الثانية والثالثة و الخ لكمية س

* ٢١٤ * ولتدبير القانون فى عمومه يلزم من بعد ماسبق ان تكون س و ص دوال لمتغير ثالث غير معلق ـے ويوجد على موجب بند (٢٤)

$$\frac{\text{و ص}}{\text{و ـے}} = \frac{\text{و ص}}{\text{و س}}\,\frac{\text{و س}}{\text{و ـے}}$$

ويستخرج من هذه المعادلة

$$\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\frac{\text{وص}}{\text{وے}}}{\frac{\text{وس}}{\text{وے}}} \quad \cdots\cdots \quad (١٢٩)$$

ثم نأخذ التفاضل الثاني الى ص ونفعل بالطرف الثاني كما فعل بالكسور في بند (١٩) فيوجد

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}} = \frac{\frac{\text{وس}}{\text{وے}}\,\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وے}} - \frac{\text{وص}}{\text{وے}}\,\frac{\text{و}^{٢}\text{س}}{\text{وے}}}{\frac{\text{وس}^{٢}}{\text{وے}^{٢}}}$$

ولرمز وے في هذه الكمية استعمالان احدهما بيان ما يكون المتغير غير المعلق ے والآخر دخوله في الكمية المذكورة كعلامة جبر (والمراد بعلامة الجبر هنا كمية جبرية) ويمكننا أن لا نعتبر وے الا بالمعنى الثاني مادامت ے هي المتغير غير المعلق هذا والكمية السابقة تختصر باسقاط المضروب المشترك $\text{وے}^{٢}$ بكتابتها هكذا

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}} = \frac{\text{وس}\,\text{و}^{٢}\text{ص} - \text{وص}\,\text{و}^{٢}\text{س}}{\text{وس}^{٢}}$$

واذا قسمنا على وس صارت

$$\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{وس}^{٢}} = \frac{\text{وس}\,\text{و}^{٢}\text{ص} - \text{وص}\,\text{و}^{٢}\text{س}}{\text{وس}^{٣}}$$

* ٢١٥ * وبالعمل هكذا على معادلة (١٢٩) يرى انه باخذ ے متغيرا غير معلق يصير الطرف الثاني للمعادلة مطابقا للاول (ومعنى مطابق للاول عينه حذا بحذا) ويعلم من ذلك انه متى تؤخذ ے للمتغير غير المعلق

لا يكون

لايكون الا تغير واحد ينبغى فعله فى القانون المشتمل على المكررات التفاضلية $\frac{\text{و ص}}{\text{و س}}$ و $\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}$ وذلك عبارة عن تبديل المكرر التفاضلى الثانى بهذا

$$\frac{\text{و س و}^{٢}\text{ص} - \text{و ص و}^{٢}\text{س}}{\text{و س}^{٣}}$$

وانطبيق هذه الاعتبارات على نصف قطر الانحنا الذى هو على ما فى بند (١٨٦)

$$\text{نق} = \frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^{٢}}{\text{و س}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{\text{و}^{٢}\text{ص}}{\text{و س}^{٢}}}$$

تقول انه لمعرفة مقدار نق فى الحالة التى تكون فيها ى مبينة للمتغير غير المعلق ينبغى تغيير هذه المعادلة بهذه

$$\text{نق} = \frac{\left(1 + \frac{\text{و ص}^{٢}}{\text{و س}^{٢}}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{\text{و س و}^{٢}\text{ص} - \text{و ص و}^{٢}\text{س}}{\text{و س}^{٣}}}$$

وبمراعاة كون البسط يؤول الى $\frac{\left(\text{و س}^{٢} + \text{و ص}^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{و س}^{٣}}$ يوجد

$$\text{نق} = \frac{\left(\text{و س}^{٢} + \text{و ص}^{٢}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\text{و س و}^{٢}\text{ص} - \text{و ص و}^{٢}\text{س}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (١٣٠)$$

* ٢١٦ * واذن يلزم مقدار نق هذا كون س و ص تكون دوال لمتغير ثالث غير معلق فاذا كان س هو هذا المتغير يعنى اذا وجد ى = س كان $\text{و}^{٢}\text{س} = ٠$ ويعود هذا القانون

فى الحالة الاعتيادية الى

$$نق = \frac{(و^{٢}س + و^{٢}ص)^{\frac{٣}{٢}}}{وس\,و^{٢}ص} = \frac{\left(١ + \frac{و^{٢}ص}{و^{٢}س}\right)^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{و^{٢}ص}{و^{٢}س}}$$

* ٢١٧ * ولكن اذا كان يراد أن يكون الرأسى ص يبين المتغير غير المعلق عوضا عن أخذ س لذلك المتغير تنظر أن هذا الشرط يكون متبينا بمعادلة ص = ى وباخذ تفاضل هذه المعادلة مرتين يوجد

$$\frac{وص}{وى} = ١ \quad و \quad \frac{و^{٢}ص}{و^{٢}ى} = ٠$$

وتبين المعادلة الاولى من هاتين المعادلتين ان ص هو المتغير غير المعلق وهذا لا يغير القانون ولكن الثانية تبين ان $و^{٢}ص$ يجب أن يكون صفرا وتؤول معادلة (١٣٠) حينئذ الى

$$نق = -\frac{(و^{٢}س + و^{٢}ص)^{\frac{٣}{٢}}}{وص\,و^{٢}س}$$

* ٢١٨ * وليتنبه انه متى تكون س مبينة للمتغير غير المعلق وجد بناء على ذلك $و^{٢}س = ٠$ استدل بهذه المعادلة على ان وس ثابتة وينتج من ذلك عموما أن تفاضل المتغير المنظور متغيرا غير معلق كمية ثابتة

* ٢١٩ * واخيرا اذا أخذ القوس للدلالة على المتغير غير المعلق يوجد

$$وى = \sqrt{و^{٢}س + و^{٢}ص}$$

وبتربيع الطرفين وقسمتهما بعد ذلك على $و^{٢}ى$ يوجد

$$\frac{و^{٢}س}{و^{٢}ى} + \frac{و^{٢}ص}{و^{٢}ى} = ١$$

واذا

وإذا أخذنا تفاضل هذه المعادلة واعتبرنا $و ے$ ثابتة على ما في بند (٤١٨) حيث كانت ے هي المتغير غير المعلق واجرينا العمل كما في قاعدة الاسس وجدنا

$$\frac{٢\, و س\, و^{٢} س}{و ے^{٢}} + \frac{٢\, و ص\, و^{٢} ص}{و ے^{٢}} = ٠$$

ومنه يستخرج

$$و س\, و^{٢} س = - \, و ص\, و^{٢} ص$$

وإذا وضعنا حينئذ مقدار $و^{٢} س$ او مقدار $و^{٢} ص$ المستخرج من هذه المعادلة في معادلة (١٣٠) يوجد في الحالة الاولى

$$نق = \frac{(و س^{٢} + و ص^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{(و س^{٢} + و ص^{٢})\, و^{٢} ص}\, و س = \frac{\sqrt{و س^{٢} + و ص^{٢}}}{و^{٢} ص}\, و س$$

وفي الحالة الثانية

$$نق = - \frac{(و س^{٢} + و ص^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{(و س^{٢} + و ص^{٢})\, و^{٢} س}\, و ص = - \frac{\sqrt{و س^{٢} + و ص^{٢}}}{و^{٢} س}\, و ص$$

* ٢٢٠ * لم نعتبر فيما سبق الا المكررين التفاضليين

$\frac{و ص}{و س}$ و $\frac{و^{٢} ص}{و س^{٢}}$ ولكن اذا كان القانون يحتوي على مكررات تفاضلية

يترتب علينا تعيين مقادير $\frac{و^{٣} ص}{و س^{٣}}$ و $\frac{و^{٤} ص}{و س^{٤}}$ .... الخ

التي تنسب للحالة التي يكون فيها س و ص دوال لمتغير ثالث غير معلق بكيفيات مشابهة للتي استعملت

(في طريقة الصغيرات جدا)

* ٢٢١ * تعريف اللانهائى واعتباره يؤول الى تقرير هذه القضية وهى أن كل كمية قبلت الزيادة لاتكون غير منتهية اوغير محدودة ولذا يجب اسقاط $ح$ من كمية $س + ح$ اذا اعتبرت $س$ غير منتهية والا لقبلت كمية $س$ الزيادة ايضا وهذا يخالف تقريرنا

* ٢٢٢ * وحيث كانت هذه القضية هى الاساس لزم أن نثبتها باثبات كاف فنقول

لتكن معادلة

$$\frac{١}{ح} + \frac{١}{س} = م \quad \cdots\cdots \quad (١٣١)$$

فبضرب هذه المعادلة فى $ح س$ يحدث

$$س + ح = م ح س \quad \cdots\cdots \quad (١٣٢)$$

هذا واذا فرضنا ان $س$ تصير غير منتهية وصل كسر $\frac{١}{س}$ الى غاية درجة نقصانه فيؤول لامحالة الى صفر وتصير معادلة (١٣١) حينئذ هكذا

$$م = \frac{١}{ح}$$

واذا وضعنا هذا المقدار فى معادلة (١٣٢) حدث

$$س + ح = س$$

وذلك يورى ان كمية $س + ح$ تؤول الى $س$ متى تكون $س$ غير منتهية وهذا ماأردنا اثباته

* ٢٢٣ * كمية $ح$ التى تكون $س$ بالنسبة اليها غير منتهية هى المسماة صغيرة جدا بالنسبة الى $س$

* ٢٢٤ * حيث انا لانعتبر هنا الا نسب الكميات فالاثبات السابق يقع ايضا متى يكون لكمية $س$ مقدار منته بشرط ان مقدار $ح$ يكون صغيرا جدا بالنسبة الى كمية $س$ وقضايا الكسور تجعل هذه الدعوة فى غاية الوضوح لانه اذا قارنا كمية $ـ$ المنتهية بكسر $\frac{ـ}{ع}$ يتحقق انه كلما

زادت

زادت ع نقص الكسر واذن يصير هذا الكسر على الاطلاق صفرا متى تصير ع غير منتهية ولذا يسقط نظرا الى س التى تكون غير منتهية بالنظر الى $\frac{س}{ع}$

* ٢٢٥ * الكميتان الصغيرتان جدا لا تكون نسبتهما صفرا لانه يوجد

$$\frac{ح}{\infty} : \frac{س}{\infty} :: ح : س$$

وزيادة على ذلك يعرف ان الكميتين الصغيرتين جدا يمكن اعتبارهما كالكميتين الكبيرتين جدا ولذا لا تكون النسبة $\frac{واص}{واس}$ للكميتين الصغيرتين جدا المرموز لهما برموز واس و واص صفرا وهذا الناتج يطابق ما وجدناه باعتبار النهايات

* ٢٢٦ * متى تكون كمية س صغيرة جدا بالنسبة الى مقدار منته رمزه ح فالمربع $س^٢$ يكون صغيرا جدا بالنسبة الى س لانه يستدل بتناسب

$$١ : س :: س : س^٢$$

ان $س^٢$ تدخل فى س مرارا عدتها كعدة دخول س فى الواحد يعنى عدد مرار غير منته

ويثبت كذلك بواسطة تناسب $س : س^٢ :: س^٢ : س^٣$ انه متى كان $س^٢$ صغيرا جدا بالنسبة الى س كان ايضا حد $س^٣$ صغيرا جدا بالنسبة الى $س^٢$ ولذلك انقسمت الصغيرات جدا الى درجات او مراتب مختلفة فكمية س فى الامثلة السابقة هى صغير جدا بدرجة اولى و $س^٢$ صغير جدا بدرجة ثانية و $س^٣$ صغير جدا بدرجة ثالثة وهكذا

* ٢٢٧ * وليتأمل انه متى كانت س صغيرة جدا بالنسبة الى ح كان كذلك س مضروبة فى كمية محدودة ب واثبات ذلك أن تقول حيث ان كمية س يمكن اعتبارها

كسرا مقامه يكون غير محدود فنرمز لها بهذا الرمز $\frac{\text{هـ}}{\infty}$ ومعلوم ان $\frac{\text{ب هـ}}{\infty}$
او $\frac{\text{ب هـ}}{\infty}$ شيأ واحدا وهذه الكميات ليست الا عدما بالنسبة الى ح

* ٢٢٨ * الصغير جدا بدرجة اولى يسقط متى يكون جانب كمية محدودة لانها لا تزداد به وكذا يسقط الصغير جدا بدرجة ثانية الذى يكون فى جانب صغير جدا بدرجة أولى وهلم جرا

مثلا اذا كانت هذه الكمية

ح + ب ص + هـ ص^{2} + و ص^{3}

وكان فيها ص صغيرا جدا بدرجة أولى كان هـ ص^{2} صغيرا جدا بدرجة ثانية و ص^{3} صغيرا جدا بدرجة ثالثة ويجب حينئذ اسقاط و ص^{3} لان و ص^{3} لا يمكن أن يزود هـ ص^{2} وحيث ان هـ ص^{2} لا يزيد ب ص فيحذف ايضا وبالجملة يحذف ب ص كذلك حيث ان هذا الصغير جدا الذى هو بدرجة أولى لا يمكن أن تزداد به كمية ح المحدودة واذن يبقى ح فقط

* ٢٢٩ * الكميتان الصغيرتان جدا س و صَ حاصل ضربهما يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية لانه يحدث من حاصل ضرب س × ص هذا التناسب

١ : ص :: س : س صَ

وبه يستدل انه حيث كان ص صغيرا جدا بالنسبة الى ١ فحاصل الضرب س ص يكون صغيرا جدا بالنسبة الى س واذن يكون صغيرا جدا بدرجة ثانية

* ٢٣٠ * ويثبت ايضا ان حاصل ضرب الثلاث صغيرات جدا بدرجة أولى يبين صغيرا جدا بدرجة ثالثة

* ٢٣١ * يمكنا الآن شرح نظر التفاضل من بعد طريقة الصغيرات جدا ولاجل ذلك نفرض ان متغير س ياخذ فى دالة ما زيادة صغيرة جدا تبين برمز ى س بحيث تتغير س بكمية س + ى س والفرق بين

الناتج

الناتج المستجد والاول يكون هو تفاضل هذه الدالة

* ٢٣٢ * فلايجاد تفاضل د س مثلا نغير فى هذه الدالة س بكمية س + و س فتصير د (س + و س) = د س + د و س واذا طرح منها د س كان الباقى وهو د و س هو التفاضل المطلوب

* ٢٣٣ نبحث ايضا عن تفاضل د س٣ ولذلك نغير س بكمية س + و س فيوجد د (س + و س)٣ ثم نطرح من هذا الناتج كمية د س٣ ونحل ونختصر فنجد اولا

٣ د س٢ و س + ٣ د س و س٢ + د و س٣

وفى هذا يجب اسقاط كمية د و س٣ حيث انها صغيرة جدا بدرجة ثالثة ولا يمكن أن تزدادها ٣ د س و س٢ وحيث ان ٣ د س و س٢ صغيرة جدا بدرجة ثانية فينبغى اسقاطها كذلك من جانب ٣ د س٢ و س التى هى صغيرة جدا بدرجة أولى و يبقى ٣ د س٢ و س لاجل التفاضل المطلوب

* ٢٣٤ يؤخذ تفاضل اى دالة لمتغير س من بعد القاعدة السابقة بأن تسقط الصغيرات جدا بدرجة عليا و يؤول هذا الى حفظ الحد الاول من الحل كما فعل فى طريقة النهايات

ومثاله لايجاد تفاضل ى س ينظر أنه عوضا عن العمل بطريق النهايات هكذا

ى (س + هـ) − ى س / هـ = ح + د هـ + د َ هـ٢ + د ً هـ٣ + الخ

الذى يحدث منه فى حالة التحديد والنهاية و ى س / و س و س = ح و س

لاجل التفاضل يفعل بطريق الصغيرات جدا هكذا

ى (س + و س) = ى س + ح و س + د و س٢ + د َ و س٣ + .. الخ

و بطرح الدالة الاولية يبقى

ح و س + د و س٢ + د َ و س٣ + ... الخ

وحيث انه يجب اسقاط الصغيرات جدا بدرجات عالية فلا يحفظ الا حده
ح و/س الذى يكون هو التفاضل المطلوب

* ٢٣٥ ولايجاد تفاضل حاصل ضرب متغيرين ص و ع
يفرض ان ص تصير ص + و/ص و ع تصير ع + و/ع
متى تغير س بكمية س + و/س فحاصل الضرب ص ع يصير
حينئذ محولا الى (ص + و/ص)(ع + و/ع) و بحله وطرح ص ع
منه يبقى ص و/ع + ع و/ص + و/ص و/ع وحيث ان الحد الاخير
لهذا الناتج صغير جدا بدرجة ثانية فيسقط و يوجد لتفاضل ص ع
كمية ص و/ع + ع و/ص

* ٢٣٦ * ويستخرج من بعد ذلك تفاضل حاصل ضرب جملة
مضاريب وبعده تفاضل سم بالكيفيات التى اتبعناها حين استعملنا
طريقة النهايات

* ٢٣٧ * تفاضل كمية $\frac{س}{م}$ يستخرج ايضا بسهولة متى تحل
كمية $\frac{س + و/س}{م}$ وهذا الحل ينال لكل كمية $\frac{س + هـ}{م}$ من بعد بند (٣٦)

ثم يبحث عن مقدار $\frac{س + و/س}{م} - \frac{س}{م}$ ولا يحفظ منه الا حده

الاول وتسقط الحدود الباقية حيث انها صغيرات جدا بدرجات واطية عن
درجة الحد المحفوظ و يستخرج من بعد هذا تفاضل لوغا س كما بين

* ٢٣٨ * وبالنظر لتفاضل جاس يوجد
حا(س+و/س) ـ حاس = حاس جتا و/س + جا و/س جتاس ـ حاس
و بسبب كون قوس و/س صغيرا جدا يكون
جتا و/س = ١ و جا و/س = و/س
و يوجد بواسطة هذه المقادير
و/ . جاس = و/س جتاس

٢٣٩

٢٣٩ * لما كانت ثمرة مسئلة المماسات ومزيتها لاتذكر في حساب التفاضل التزمت أن أثبتها بطريقة الصغيرات جدا فأقول ليكن ح م و حَ مَ (شكل ٤٧) رأسيان متقاربان جدا و م و خطا موازيا للمحور الآفاقي فمماس م ط يمكن اعتباره كامتداد عنصر م مَ من المنحنى لانه حيث كان هذا العنصر صغيرا جدا يمكن نظره مستقيما فلذا رمزنا للبعد اح بحرف س ولبعد م ح بحرف ص صارت زيادة س التي هي ح حَ عبارة عن وس وزيادة ص تكون مَ و = وص ومثلث م مَ و الصغير جدا يحدث منه لمشابهته مثلث م ح ط

مَ و : م و :: م ح : ح ط أو

وص : وس :: ص : ح ط ومنه يكون

$$\text{ح ط} = \text{ص}\ \frac{\text{وس}}{\text{وص}}$$

ثم يوجد العمودي و المماس ومعادلات هذه الخطوط كما في بندي (٧٠) و (٧١)

٢٤٠ * ولمعرفة تفاضل قوس يعتبر القوس المحصور بين الرأسين ح م و حَ مَ القريبين من بعضهما جدا كخط مستقيم فمن ثمة يحدث من مثلث م مَ و القائم الزاوية

$$\text{م مَ}^2 = \text{م و}^2 + \text{مَ و}^2$$

وبالرمز برمز قو للقوس الكلي يكون م مَ مبينا برمز وقو وتؤول المعادلة السابقة الى

$$\text{وقو}^2 = \text{وس}^2 + \text{وص}^2$$

و باخذ الجذر التربيعي للطرفين يوجد

$$\text{وقو} = \sqrt{\text{وس}^2 + \text{وص}^2}$$

* ٢٤١ تفاضل القوس من منحن ذى احداثيات قطبية يوجد ايضا بغاية السهولة باعتبار الصغيرات جدا ولذلك نفرض (شكل ٨٢) ان سَ سَ و مه يكونان قوسين أحدهما وهو الاول من الدائرة المرسومة بنصف قطر يساوى الواحد وثانيهما من الدائرة المرسومة بنصف قطر يساوى ع ويكونان محصورين فى الزاوية الصغيرة جدا مَ ام المتشكلة من نصفى قطرين احتراقيين فمثلث همَ م يمكن نظره كمثلث مستقيم قائم زاوية ه ويوجد حينئذ

$$\text{مم}' = \sqrt{\text{هم}'^2 + \text{هم}^2}$$

وبمراعاة كون مَ ه = وع و مه يساوى ع وى على مقتضى تناسب ١ : وى :: ع : مه

يمكنا أن نبدل هَم و مه بمقاديرها ونضع وقو محل مم َ فنجد

$$\text{وقو} = \sqrt{\text{(وع)}^2 + \text{ع}^2\text{وى}^2}$$

وبمقارنة مثلث ممَ ه المذكور بمثلث مَ اط يحدث لنا تحت الظل للمنحنى القطبى بواسطة تناسب

$$\text{مَ ه} : \text{مه} :: \text{ام} : \text{اط}$$

واذا غيرنا ام فى هذا التناسب بخط ام الذى لا يختلف عنه الا بالصغير جدا حدث

وع : ع وى :: ع : اط ومنه يستخرج

$$\text{اط} = \text{ع}^2 \frac{\text{وى}}{\text{وع}}$$

طريقة لاجرانج لاثبات اصول حساب التفاضل من غير اعتبار النهايات والصغيرات جدا وكل كمية يجرى حذفها

* ٢٤٢ * لما كانت قضية تيلور كثيرة الفوائد والمنافع خصوصا عند ارادة حل الدوال الى متسلسلات لاح للمعلم لاجرانج كون اصول حساب التفاضل تنحصر فى هذه القضية او تحدث منها ومن ثم اثبتها من غير استعمال حساب التفاضل بالطريقة الآتية وهى هذه

لتكن ص = د(س + هـ)

فهذه الدالة تؤول بالطبع الى د س متى يجعل فيها هـ = ٠ ويكون لذلك وقعا متى كان الجزء المحتوى على هـ فى هذه المعادلة مكررا لكمية هـ ولنبينه برمز ع هـ فمن ثم يكون

د(س+هـ) = د س + ع هـ

و ع يمكن أن تكون دالة لكمية هـ فاذا رمزنا برمز ع١ لما تؤول اليه ع حين يفرض فيها هـ = ٠ وكان ك هـ هو الجزء الذى يتعلق او يرتبط بكمية هـ نجد ايضا ع = ع١ + ك هـ وبمداومة هذا التبيان توجد هذه المعادلات المتوالية

ص = د س + ع هـ
ع = ع١ + ك هـ
ك = ك١ + ر هـ
الخ الخ الخ

وبوضع مقدار ع المعلوم بالمعادلة الثانية فى المعادلة الاولى يحدث

ص = د س + ع١ هـ + ك هـ٢

ثم يوجد بوضع مقدار ك المعلوم بالمعادلة الثالثة فى هذا الناتج

ص = د س + ع١ هـ + ك١ هـ٢ + ر هـ٣

وبالمداومة هكذا ووضع د(س + هـ) محل ص يوجد عموما

د(سـ+هـ)=ذسـ+ع١هـ+ك١هـ٢+ل١هـ٣+و١هـ٤+..الخ (١٣٣)

* ٢٤٣ * وكمية د(سـ+هـ) تبين على العموم الدالة التى لم تزل غير محولة الى متسلسلة فاذا غيرت فى هذه الدالة سـ بكمية سـ+ى حدث ناتج كما لو غيرت هـ بكمية هـ+ى لان هذه الدالة لا يمكن أن تحتوى على متغير سـ من غير أن يكون هذا المتغير متبوعا بكمية هـ بلا واسطة فالحد الذى كحد ل(سـ+هـ)م مثلا يصير ل(سـ+ى+هـ)م متى تغير سـ بكمية سـ+ى ولاشك ان هذا الناتج كحكمية ل(سـ+هـ+ى)م التى تنتج من وضع هـ+ى محل هـ فى دالة ل(سـ+هـ)م وماذكر فى شأن هذا الحد يطبق على مابقى من الحدود ويتضح من ذلك أن الطرف الاول لمعادلة (١٣٣) يحدث نواتج متطابقة فى الحالتين وينبنى عليه انه ينتج من حل دسـ+ع١هـ+ك١هـ٢+..الخ نواتج متحدة بوضع سـ+ى محل سـ أو بوضع هـ+ى محل هـ

* ٢٤٤ * فبوضع هـ+ى أولا محل هـ فى حل

دسـ+ع١هـ+ك١هـ٢+....الخ يوجد

دسـ+ع١(هـ+ى)+ك١(هـ+ى)٢+ل١(هـ+ى)٣+..الخ (١٣٤)

وبكتابة الحدين الاولين فقط من كل من هذه الكميات ذات الحدين يحدث

دسـ+ع١هـ+ع١ى+ك١هـ٢+٢ك١هـى+ل١هـ٣+٣ل١هـ٢ى+الخ (١٣٥)

ثم لايجاد الناتج من وضع سـ+ى محل سـ فى كمية دسـ+ع١هـ+ك١هـ٢+ل١هـ٣+..الخ نراعى ان الزيادة هـ موجودة لامحالة فى هذه المتسلسلة ولا تدخل فى دسـ ولا فى المكررات ع١ ك١ ل١ و١ الخ التى هى كميات لا يمكن أن تحتوى الا على سـ ولذلك يمكن اعتبارها دوال لهذا المتغير أعنى سـ وحيث كانت معادلة (١٣٣) تقع لاى دالة لمتغير سـ فوضع سـ+ى فيها محل سـ يغير

د س بكمية د س + ع ا ى + ك ا ى^٢ + ر ا ى^٣ + و ا ى^٤ + الخ

و ع ا بكمية ع ا + ع َ ا ى + ع ً ا ى^٢ + ع ٌ ا ى^٣ + ع ا ى^٤ + الخ

و ك ا بكمية ك ا + ك َ ا ى + ك ً ا ى^٢ + ك ٌ ا ى^٣ + ك ا ى^٤ + الخ

و ر ا بكمية ر ا + ر َ ا ى + ر ً ا ى^٢ + ر ٌ ا ى^٣ + ر ا ى^٤ + الخ

و و ا بكمية و ا + و َ ا ى + و ً ا ى^٢ + و ٌ ا ى^٣ + و ا ى^٤ + الخ

الخ الخ الخ الخ الخ الخ الخ الخ

واذا وضعنا مقادير د س و ع ا و ك ا و ر ا و و ا الخ هذه فى متسلسلة د س + ع ا هـ + ك ا هـ^٢ + ر ا هـ^٣ + الخ يوجد

د س + ع ا ى + ك ا ى^٢ + ر ا ى^٣ + الخ + (ع ا + ع َ ا ى + ع ً ا ى^٢ + الخ) هـ

+ (ك ا + ك َ ا ى + ك ً ا ى^٢ + الخ) هـ^٢ + (ر ا + ر َ ا ى + ر ً ا ى^٢ + الخ) هـ^٣ ... الخ (١٣٦)

* ٢٤٥ * وينبغى أن يكون هـذا الحل مطابقا للحل المتبين برمز (١٣٥) على ما فى بند (٢٤٣) فيلزم أن تكون الحدود المشتملة على هـ بقوى متحدة فى هذين الحلين متساوية (انظر الملحوظة الثانية) واذن يوجد بمطابقة الحدود المتبوعة بكميات هـ ى و هـ^٢ ى و هـ^٣ ى الخ فى هذين الحلين

ع َ ا = ٢ ك ا و ك َ ا = ٣ ر ا و ر َ ا = ٤ و ا و الخ (١٣٧)

* ٢٤٦ * قد رأينا فى بند (٢٤٤) ان ع ا هى على العموم دالة لمتغير س ومن اجل ذلك نرمز لها برمز د َ س ونرمز برمز د ً س للعدد الذى يضرب فى المكرر هـ فى حل د َ (س + هـ) وبرمز د ٌ س للعدد الذى يضرب فى المكرر هـ فى حل د ً (س + هـ) وهلم جرا فنجد هذه المعادلات

$$\left.\begin{array}{l} د(س+ه)=دس+هدَس+\text{الحدود المحتوية على } ه^{٢} \text{ و } ه^{٣} \text{ الخ} \\ دَ(س+ه)=دَس+هدً س+\text{الحدود المحتوية على } ه^{٢} \text{ و } ه^{٣} \text{ الخ} \\ دً(س+ه)=دً س+هدٌ س+\text{الحدود المحتوية على } ه^{٢} \text{ و } ه^{٣} \text{ الخ} \\ \text{الخ} \quad \text{الخ} \quad \text{الخ} \quad \text{الخ} \end{array}\right\} (١٣٨)$$

* ٢٤٧ * وحيث كان $ح_{١} = دَس$ بالفرض بند (٢٤٦)
فاذا جعلنا فى هذه المعادلة $س = س + ه$ حدث

$$ح_{١} + حَ_{١} ه + حً_{١} ه^{٢} + حٌ_{١} ه^{٣} + \ldots \text{الخ} = دَ(س+ه) \ldots (١٣٩)$$

وبوضع مقدار $دَ(س+ه)$ المعلوم بثانية معادلات (١٣٨) فى هذه المعادلة يوجد

$$ح_{١} + حَ_{١} ه + حً_{١} ه^{٢} + \ldots \text{الخ} = دَس + هدً س + \text{الحدود المحتوية على } ه^{٢} \text{ و } ه^{٣} \text{ الخ}$$

وحيث ان هذه المعادلة لاتزال حقيقية مهما كانت كمية $ه$ يلزم ان تكون الحدود المطابقة لقوى واحدة لحرف $ه$ متساوية واذن يوجد

$$حَ_{١} = دً س$$

ومقدار $حَ_{١}$ هذا يغير الاولى من معادلات (١٣٧) الى $دً س = ٢ ك_{١}$
الذى يستخرج منه

$$ك_{١} = \frac{١}{٢} دً س$$

واذا غيرنا فى هذه المعادلة $س$ بكمية $س + ه$ حدث

$$ك_{١} + كَ_{١} ه + كً_{١} ه^{٢} + \ldots \text{الخ} = \frac{١}{٢} دً(س+ه)$$

ثم نضع محل $دً(س+ه)$ حلها المعلوم بثالثة معادلات (١٣٨) فنجد

$$ك_{١} + كَ_{١} ه + كً_{١} ه^{٢} + \ldots \text{الخ} = \frac{١}{٢}(دً س + هدٌ س + \text{الحدود المحتوية على } ه^{٢} \text{ و } ه^{٣} \text{ الخ})$$

ونطابق الحدود المضروبة فى القوة الاولى لكمية $ه$ فنجد $كَ_{١} = \frac{١}{٢} دٌ س$
وبوضع هذا المقدار فى ثانية معادلات (١٣٧) يوجد $\frac{١}{٢} دٌ س = ٣ حَ_{١}$
الذى يستخرج منه

$$\text{م}_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\, \text{د‴س}$$

وتستمر هكذا فنجد على التعاقب جميع مكررات معادلة (١٣٣) فنضع في تلك المعادلة مقادير ج_1 و ك_1 و م_1 الخ فنجد

$$\text{د(س+هـ)} = \text{دس} + \text{هـ د′س} + \frac{\text{هـ}^2}{1\times2}\text{د″س} + \frac{\text{هـ}^3}{1\times2\times3}\text{د‴س} + \text{الخ} \quad (١٤٠)$$

* ٢٤٨ * اذا اعتبرت الآن الاولى من معادلات (١٣٨) شوهد أن د′س هي المكرر لكمية هـ في حل د(س+هـ) وهي التي تتبين برمز $\frac{\text{و·دس}}{\text{وس}}$ أو $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ وكذلك باعتبار ثانية معادلات (١٣٨) يعرف ان المكرر د″س للقوة الاولى لكمية هـ في حل د′(س+هـ) يكون متبينا برمز $\frac{\text{و·د′س}}{\text{وس}}$ اعني برمز $\frac{\text{و·}\frac{\text{وص}}{\text{وس}}}{\text{وس}} = \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ وهكذا هذا واذا وضعت مقادير دس و د′س و د″س الخ هذه في معادلة (١٤٠) حدث

$$\text{د(س+هـ)} = \text{دس} + \frac{\text{وص}}{\text{وس}}\text{هـ} + \frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}\cdot\frac{\text{هـ}^2}{1\times2} + \frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3}\cdot\frac{\text{هـ}^3}{2\times3} + \text{الخ} \quad (١٤١)$$

* ٢٤٩ * فها هو قد تبين قانون تيلور من غير استعمال حساب التفاضل وكمية $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ الداخلة في هذا القانون تشير للعملية التي يستخرج بها مكرر هـ في حل د(س+هـ) وحين يوجد ذلك المكرر تبين لنا كميات $\frac{\text{و}^2\text{ص}}{\text{وس}^2}$ و $\frac{\text{و}^3\text{ص}}{\text{وس}^3}$ والخ ان العملية المذكورة اذا كررت وأديت تستخرج منها مكررات باقي قوى هـ واذن لم نحتج الا لمعرفة معنى $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ وحقيقته في كل دالة بطرق جبرية فاذا

طلب مثلا حقيقة $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ فى الدالة $س^م$ تحلل $(س+هـ)^م$ بقانون الكمية ذات

الحدين فيوجد $س^م + م س^{م-١} هـ +$ الخ وحيث ان $\frac{\text{وص}}{\text{وس}}$ يجب أن يكون

مبينا مكرر القوة الاولى لكمية هـ فى هذا الحل يوجد $\frac{\text{وص}}{\text{وس}} = م س^{م-١}$

ومن ثم يؤول الامر الى امكان ايجاد حل الدوال المتنوعة الممكن بيانها بالجبر بواسطة الطرق الحسابية وهذه الطرق لا تختلف عن الطرق التى شرحناها لحل الدوال على اختلافها والتى ينتج منها ما بقى بتعشقها ببعضها وبذلك بينا حلول $ح^{س+هـ}$ و لوغا $(س+هـ)$ و جتا $(س+هـ)$ و الخ

* ٢٥٠ * ومن ثم صارت هذه الطريقة طريقة ثالثة من بعدها توجد اصول حساب التفاضل مبينة بوجه غير متعلق باعتبار النهايات والصغيرات جدا او كل كمية يحكم بحذفها ومع ذلك كله فلا غنى لهذه الطريقة عن طريقة النهايات لانه متى يجرى تطبيقها ويراد مثلا تعيين الاجسام او السطوح وتعديل المنحنيات او ايجاد كميات تحت المماس وتحت العمودى الخ يستلزم الدخول فى النهايات أو الصغيرات جدا

* ٢٥١ * لاعتبار حلول الدوال المتنوعة $(س+هـ)^م$ و $ح^{س+هـ}$ و لوغا $(س+هـ)$ و جا $(س+هـ)$ و الخ التى تعلم من علم الجبر يقال حيث ان هذه الدوال محدودة العدد يسهل معرفة كون مكرر القوة الاولى لكمية هـ فى حلولها لا يكون صفرا ولا غير منته مادام الى س مقدارها غير المعين وذلك ينتج من الاثبات السابق لانه اذا فرضنا $ع_١ = ٠$ فى معادلة

$$د(س+هـ) = د س + ع_١ هـ + ك_١ هـ^٢ + ر_١ هـ^٣ + \ldots \text{الخ}$$

تقع حالتان وهما اما أن يعلم بمقدار س الداخل فى $ع_١$ بمعادلة

متطابقة

متطابقة واما بمعادلة ليست متطابقة ففى الحالة الثانية تبين $ح_١ = ٠$
معادلة ببعض درجات وتلك المعادلة لاتحدث الا مقادير المجهول $س$
محدودة العدد وهذا يخالف الفرض اذ الفرض ان $س$ يقبل اى مقدار
كان ولكن اذا كان $ح_١ = ٠$ يعنى اذا كانت $دَس = ٠$ معادلة
متطابقة فى $س$ [والحالة التى لاتحتوى فيها $ح_١$ على $س$ تنحصر
فى هذه الحالة لانه اذا كان مقدار $ح_١$ الذى هو صفر متبينا برمز $ح - ح$
أمكن اعتباره $ح - س - (ح - س)$] نجعل $س = س + هـ$
فيوجد ايضا $دَ(س+هـ) = ٠$ وحيث كانت $هـ$ داخلة فى جميع
المحلات التى تدخل فيها $س$ فهذه المعادلة تكون صفرا بالتطابق بالنسبة
الى $هـ$ ولك أن تقول انها لم تزل متحققة مهما كانت $هـ$ واذن
يكون حلها الذى هو على مافى بند (١٣٩)

$$ح_١ + حَ_١ هـ + ح''_١ هـ^٢ + ح'''_١ هـ^٣ + \cdots\cdots \text{ الخ} = ٠$$

متحققا كذلك مهما كانت $هـ$ ومعلوم انه متى تكون معادلة من هذا القبيل
صفرا بالتطابق بنسبة $هـ$ تكون جميع مكررات قوى $هـ$ أصفارا
بالافتراق (انظر الملحوظة الثانية) فمن ثمة يوجد

$$حَ_١ = ٠ \quad و \quad ح''_١ = ٠ \quad و \quad ح'''_١ = ٠ \quad و \text{ الخ}$$

وبوضع هذه المقادير فى معادلات

$$حَ_١ = ٢كَ_١ \quad و \quad ح''_١ = ٣ لَ_١ \quad و \quad ح'''_١ = ٤ وَ_١ \quad و \text{ الخ}$$

التى تنتج من مطابقة الحدود الكائنة فيها $ـهـ$ و $ـهـ^٢$ و $ـهـ^٣$ و الخ
متحدة القوى فى متسلسلتى (١٣٤) و (١٣٦) يوجد

$$كَ_١ = ٠ \quad و \quad لَ_١ = ٠ \quad و \quad وَ_١ = ٠ \quad و \text{ الخ}$$

وبما ان معادلة (١٣٣) تؤول الى

$$د(س + هـ) = دس \quad \text{زيادة على كون } ح_١ = ٠$$

يلزم من ذلك أن لاتتغير الدالة بوضع $س+هـ$ محل $س$ وهذا يقتضى ان

تكون الدالة المذكورة متطابقة أو ثابتة لانه يعرف انه اذا كانت د سَ
بهذه الصورة سَ٢ ـ سَ٢ مثلا او كانت على صورة ث + سَ٢ ـ سَ٢
فان وضع سَ + هـ محل سَ يحدث ناتجا واحدا أبدا ويشاهد أن
الدالة تكون فى الحالة الاولى متطابقة وتؤول فى الثانية الى كمية ثابتة ث
وينبنى على هذا وذاك ان مكرر القوة الاولى لكمية هـ لايمكن أن يكون صفرا
فى الحل العمومى لدالة (سَ + هـ)

ولايستحيل فرض هذا المكرر غير محدود لانه حين يكون الطرف
الثانى لمعادلة (١٣٣) غير محدود يكون الطرف الاول كذلك
يعنى انه يكون د (سَ+هـ) = ∞ وحيث ان د (سَ+هـ)
تتركب من سَ + هـ كما تتركب د سَ من سَ فالحد الداخل
فى د (سَ+هـ) الذى يجعلها غير محدودة يجعل ايضا د سَ غير محدودة
ومثاله انه اذا كانت د (سَ + هـ) تحتوى على حد غير محدود وليكن
$\frac{ل}{سَ+هـ-(سَ+هـ)}$ يقتضى أن تكون د سَ محتوية ايضا على حد
$\frac{ل}{سَ-سَ}$ يكون غير محدود كذلك وينتج من ذلك أن الدالة المفروضة تكون
غير محدودة ولا نفرض ذلك

* ٢٥٢ * كميات دَ سَ و دً سَ و دٌ سَ و الخ
هى التى سماها لاجرانج الدالة الاولى والدالة الثانية والدالة الثالثة و الخ
لدالة سَ وعلى العموم تسمى بالدوال المشتقة وقد بين لاجرانج المذكور
ايضا الدوال المشتقة بوجه اخر بابدال $\frac{و صَ}{و سَ}$ برمز صَ و $\frac{و^٢ صَ}{و سَ^٢}$

برمز صً و $\frac{و^٣ صَ}{و سَ^٣}$ برمز صٌ وهلم جرا

(فى الحالات التى يختل فيها قانون تيلور)

* ٢٥٣ * عموما متى توضع سَ + هـ محل سَ فى دالة
لمتغير سَ فان صورة هذه الدالة تبقى متحدة حيث ان سَ+هـ تدخل

فى

في جميع المواضع التي كانت فيها $س$ ولذا متى احتوت $د س$ على جذر كانت $د(س+ه)$ مشتملة على هذا الجذر ايضا

فاذا كانت $د س = س^٢ + \frac{ح}{\sqrt{س}}$ مثلا فان الجذر يوجد نفسه في كمية

$$د(س+ه) = (س+ه)^٢ + \frac{ح}{\sqrt{س+ه}}$$

* ٢٥٤ ولا يكون كذلك دائما اذا أخذت $س$ مقدارا مخصوصا (والمراد به متعينا) مثلا اذا كان $\sqrt[٣]{س-ح}$ يدخل في $د س$ يلزم أن تشتمل $د(س+ه)$ على حد

$$\sqrt[٣]{س+ه-ح}$$

ولكن $\sqrt[٣]{س-ح}$ يحذف من $د س$ بفرض $س = ح$ ولا يحذف $\sqrt[٣]{س-ح+ه}$ الداخل في $د(س+ه)$ بهذا الفرض بل يؤول الى $\sqrt[٣]{ه} = ه^{\frac{١}{٣}}$ واذن يشتمل حل $د(س+ه)$ على جذر لا يوجد في $د س$ ولا يمكن حله بحسب القوى الصحيحة لكمية $ه$ وعدم الامكانية هذه تحقق بالمقادير غير المحدودة التي تأخذها المكررات التفاضلية مثلا اذا وجدت معادلة

$$ص = \sqrt[٣]{س-ح}$$

فانه يكون باخذ تفاضلها

$$\frac{وص}{وس} = \frac{١}{٣}(س-ح)^{-\frac{٢}{٣}} = \frac{١}{٣\sqrt[٣]{(س-ح)^٢}}$$

ويرى ان مقدار هذا المكرر التفاضلي يصير غير محدود متى تجعل $س = ح$

* ٢٥٥ * وليكن على العموم

$$د(ح+ه) = ج + جَ ه + جً ه^٢ + جٌ ه^٣ \ldots + م ه^{ن} + م_١ ه^{ن+\frac{١}{ع}} + \text{الخ} \quad (١٤٣)$$

الحل الذى يوجد بجعل س = ح والذى فيه ن + ع يبين كمية تقع بين ن و ن + ١ فنثبت الآن ان المكرر التفاضلى برتبة ن+١ غير محدود ولاجل ذلك ننظر ح كمتغير فنجد على ما فى بندى (٥٣) و (٥٤)

$$\frac{و د(ح+هـ)}{و ح}=\frac{و د(ح+هـ)}{و هـ} \text{ و } \frac{و^٢ د(ح+هـ)}{و ح^٢}=\frac{و^٢ د(ح+هـ)}{و هـ^٢} \text{ الخ } (١٤٣)$$

ثم نأخذ تفاضل معادلة (١٤٢) بالتوالى بالنسبة الى هـ ونرمز لاجل الاختصار برموز مَ و اَ و مً و اً والخ لما تؤول اليه المكررات م و ا عند ذلك فنجد

$$\frac{و د(ح+هـ)}{و هـ}=عَ+٢عً هـ+٣عٌ هـ^٢ \cdots +مَ هـ^{ن-١}+اَ هـ^{ن+\frac{١}{ع}-١}+ \text{الخ}$$

$$\frac{و^٢ د(ح+هـ)}{و هـ^٢}=٢عً+٢\times٣عٌ هـ \cdots +مً هـ^{ن-٢}+اً هـ^{ن+\frac{١}{ع}-٢}+ \text{الخ}$$

الخ و الخ و الخ و الخ

ونبدل الاطراف الاول للمعادلات الاخيرة هذه بمقاديرها المستخرجة من معادلات (١٤٣) فيحدث لنا

$$\frac{و د(ح+هـ)}{و ح}=عَ+٢عً هـ+٣عٌ هـ^٢+مَ هـ^{ن-١}+اَ هـ^{ن+\frac{١}{ع}-١}+ \text{الخ} \quad (١٤٤)$$

$$\frac{و^٢ د(ح+هـ)}{و ح^٢}=٢عً+٢\times٣عٌ هـ \cdots +مً هـ^{ن-٢}+اً هـ^{ن+\frac{١}{ع}-٢}+ \text{الخ} \quad (١٤٥)$$

الخ الخ الخ الخ

ثم نجعل هـ = ٠ فى معادلات (١٤٢) و (١٤٤) و (١٤٥) و الخ فيوجد

$$د ح=ع \text{ و } \frac{و د ح}{و ح}=عَ \text{ و } \frac{و^٢ د ح}{و ح^٢}=٢عً \text{ و الخ}$$

وذلك

وذلك يكفي لتعيين المكررات ح و حَ و حً الخ لمعادلة (١٤٢)
هذا ومن بعد النظر في معادلات (١٤٤) و (١٤٥) يعلم ان ن
تنقص واحدا في كل مرة فعل التفاضل ومتى ينتهي الى التفاضل النوني يوجد

$$\frac{و^{ن} د(ح+هـ)}{و ح^{ن}} = ٠.ل هـ^{ن-ن} + لَ هـ^{ن-ن+\frac{١}{ع}} + الخ = ل + لَ هـ^{\frac{١}{ع}} + الخ$$

ونجد لاجل التفاضل الآتي بعد

$$\frac{و^{ن+١} د(ح+هـ)}{و ح^{ن+١}} = م هـ^{\frac{١}{ع}-١} + الخ$$

وحيث كان $\frac{١}{ع}$ أقل من الواحد فكمية $\frac{١}{ع} - ١$ تدل على عدد سالب
ويمكن حينئذ كتابة المعادلة السابقة هكذا

$$\frac{و^{ن+١} د(ح+هـ)}{و ح^{ن+١}} = \frac{م + الخ}{هـ^{(١-\frac{١}{ع})}}$$

وعلى موجب ذلك متى يجعل هـ = ٠ لاجل تعيين مكرر احد حدود
معادلة (١٤٢) يوجد

$$\frac{و^{ن+١} د(ح)}{و ح^{ن+١}} = \frac{م}{٠} = \infty$$

ويكون كذلك متى يراد تعيين المكررات التفاضلية بدرجة عليا وينتج
من هذه القضية انه متى يجعل س = ح في حل د(س + هـ)
ان وجدت قوة كسرية لكمية هـ في هذا الحل وكانت محصورة بين الحدود
المتبوعة بكميتي هـ^ن و هـ^{ن+١} فلا يمكن تعيين حدود متسلسلة تيلور الا الى

درجة ن وهو اى الحد الذى درجته ن من ضمنها وجميع الحدود الاخر تصير غير محدودة

* ٢٥٦ * المفروض دالة لمتغير س متينة برمز د س ويراد تعيين حل د(س+هـ) فى حالة فرضية س = ح ولذلك يلزم كما تبين ان تحسب حدود متسلسلة

$$د س + \frac{و ص}{و س} هـ + \frac{و^{2} ص}{و س^{2}} \frac{هـ^{2}}{1\times2} + \cdots\cdots \text{ الخ}$$

ولكن اذا صار بعمل هذا الحساب احد المكررات التفاضلية غير محدود فى حال فرضية س = ح فلا يبحث عن حل د(س+هـ) بمتسلسلة تيلور وها هى الطريقة اللازم استعمالها

بوضع س + هـ محل س فى د س فحينئذ يحتوى الحد الذى كان يشتمل على س ــ ح فى المقام على س ــ ح + هـ ولا يصير غير محدود متى تجعل س = ح لكنه ينشأ عنه حد متبوع بقوة كسرية للكمية هـ

* ٢٥٧ * وليكن مثلا

$$د س = 2 ح س - س^{2} + ح \sqrt{س^{2} - ح^{2}}$$

فبأخذ التفاضل يوجد

$$\frac{و ص}{و س} = 2(ح - س) + \frac{ح س}{\sqrt{س^{2} - ح^{2}}}$$

وبوضع هذه المقادير ومقادير $\frac{و^{2} ص}{و س^{2}}$ و $\frac{و^{3} ص}{و س^{3}}$ و الخ

فى قانون تيلور بند (٥٥) يوجد

$$د(س+هـ) = 2 ح س - س^{2} + ح \sqrt{س^{2} - ح^{2}} + [2(ح - س) + \frac{ح س}{\sqrt{س^{2} - ح^{2}}}] هـ + \text{الخ}$$

وحيث ان الحد المضروب فى هـ يصير غير محدود متى تجعل س = ح

فهذا

فهذا الحل يكون غير ممكن

وفي هذه الحالة يوضع من بعد القاعدة السابقة $\text{س} + \text{ه}$ محل س

في معادلة $\text{د س} = ٢\text{ح س} - \text{س}^٢ + \text{ح}\sqrt{\text{س}^٢ - \text{ح}^٢}$ فيوجد

$$\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = ٢\text{ح س} + ٢\text{ح ه} - \text{س}^٢ - ٢\text{س ه} - \text{ه}^٢ + \text{ح}\sqrt{\text{س}^٢ + ٢\text{س ه} + \text{ه}^٢ - \text{ح}^٢}$$

وهذه المعادلة تصير بفرض $\text{س} = \text{ح}$

$$\text{د}(\text{ح}+\text{ه}) = \text{ح}^٢ - \text{ه}^٢ + \text{ح}\sqrt{٢\text{ح ه} + \text{ه}^٢} \quad \text{أو}$$

$$\text{د}(\text{ح}+\text{ه}) = \text{ح}^٢ - \text{ه}^٢ + \text{ح}\sqrt{\text{ه}}\sqrt{٢\text{ح} + \text{ه}}$$

ونحل بقانون الكمية ذات الحدين الجذر الداخل في هذه المعادلة ونرمز لاجل الاختصار للمكررات التي تحدث بذلك القانون برموز ع و عَ و عً والخ

فيوجد

$$\sqrt{٢\text{ح}+\text{ه}} = (٢\text{ح}+\text{ه})^{\frac{١}{٢}} = \text{ع} + \text{عَ ه} + \text{عً ه}^٢ + \text{عٌ ه}^٣ + \text{الخ}$$

ونضع هذا المقدار في المعادلة الاخيرة فتصير

$$\text{د}(\text{ح}+\text{ه}) = \text{ح}^٢ - \text{ه}^٢ + \text{ح ع}\sqrt{\text{ه}} + \text{ح عَ ه}\sqrt{\text{ه}} + \text{ح عً ه}^٢\sqrt{\text{ه}} + \text{الخ}$$

ويشاهد بهذا المثال انه بوضع $\text{س} + \text{ه}$ في الدالة وجعل $\text{س} = \text{ح}$ يمكن ادخال قوة او جملة قوى كسرية لكمية ه وتحل بعد ذلك بالافتراق الحدود القابلة لان تكون كذلك سواء كان بقانون الكمية ذات الحدين او بخلافه ويوضع هذه الحدود في مقدار $\text{د}(\text{ح}+\text{ه})$ فيوجد الحل المطلوب

* ٢٥٨ * وقد اثبت لاجرانج ان حل $\text{د}(\text{س}+\text{ه})$ لا يمكن أن يحتوي على حدود متبوعة بقوة كسرية الى ه متى كانت س باقية غير معينة

ولذلك يفرض $\text{د}(\text{س}+\text{ه}) = \text{د س} + \text{ح}_١\text{ه} + \text{ك}_١\text{ه}^٢ \ldots + \text{ل}\sqrt[٣]{\text{ه}}$

وحيث كان $\text{ل}\sqrt[٣]{\text{ه}}$ يقبل ثلاث مقادير ولتكن م و ن و ع

توجد هذه الحلول الثلاث لدالة $(\text{س}+\text{ه})$

$$د(س+ه) = دس + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + م$$
$$د(س+ه) = دس + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ن$$
$$د(س+ه) = دس + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ع$$

لكن دس ينبغي أن تحتوى على جذور واحدة كدالة (س + ه) كما فى بند (٢٥٣) فيلزم أن يكون لدالة س ايضا ثلاث مقادير مختلفة ك و ر و و وبوضع هذه المقادير على التوالى محل دس يوجد حينئذ

$$د(س+ه) = ك + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + م$$
$$د(س+ه) = ك + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ن$$
$$د(س+ه) = ك + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ع$$
$$د(س+ه) = ر + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + م$$
$$د(س+ه) = ر + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ن$$
$$د(س+ه) = ر + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ع$$
$$د(س+ه) = و + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + م$$
$$د(س+ه) = و + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ن$$
$$د(س+ه) = و + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + ع$$

واذن توجد لدالة (س+ه) بحلها تسع مقادير مختلفة بخلافها غير محلولة فانه لا يوجد لها الا بقدر ما لدالة س من المقادير وعلى ذلك يكون لها ثلاثة فى الحالة الاتية وحينئذ لا يمكن أن يفرض ان حل د(س+ه) يحتوى على أس كسرى لكمية ه من غير الوقوع فى المناقضة

* ٢٥٩ * وتسهل البرهنة ايضا على ان د(س+ه) لا يمكن أن تشتمل فى حلها على حد متبوع بأس سلبى لكمية ه لانها اذا كانت تحتوى على حد كحد م ه^(-ن) يوجد

$$د(س+ه) = دس + ع_١ ه + ك_١ ه^٢ \cdots + \frac{م}{ه^ن}$$

وبجعل

وبجعل $ه = ٠$ يتغير الطرف الاول بدالة $س$ والطرف الثانى عوضا عن ايلولته الى $د س$ يصير غير محدود بسبب حد $\frac{م}{ه ن}$ الذى يحتوى عليه

* ٢٦٠ * ويكون كذلك متى كان الحل مشتملا على حد متبوع بلوغاريتم $ه$ لانه اذا وجد مثلا حد كحد $ح$ لوغا $ه$ فان هذا الحد يصير $ح$ لوغا ٠ متى تجعل $ه = ٠$ وبسبب كون لوغاريتم الصفر غير محدود بالسلب يكون حد $ح$ لوغا $ه$ حينئذ غير محدود ويلزم من ذلك أن تكون $د س$ كذلك غير محدودة وهذا يخالف الفرض

انتهى حساب التفاضل

وتم

ولما كان هذا آخر ما أورده المؤلف في حساب التفاضل ان لنا أن نشرح الملحوظتين المعبر عنهما في باطن هذا الكتاب ثم نلحقهما بقضايا لطيفة للمفروضات المائلة تتعلق بعلم الضوء للأمير بيك ناظر مدرسة المهندسخانة الخديوية ببولاق فنقول

الملحوظة الاولى (بند ٥٩)

على كيفية ايجاد حل لوغاريتم س + هـ

ها هي أحد الطرق المستعملة لايجاد لوغاريتم س + هـ

يبحث اولا عن لوغا(١+س) بالكيفية الآتية وهي أن يساوى لوغا(١+هـ) بجملة حدود مرتبة بحسب قوى س بأن يراعى اولا انه لا يوجد في هذه المتسلسلة حد غير معلق بتغير س لانه اذا وجد

$$\text{لوغا}(1+\text{س}) = \text{ع} + \text{ح}\,\text{س} + \text{ح}'\,\text{س}^2 + \ldots\ \text{الخ}$$

فهذه المعادلة لا تزال متحققة مهما كان متغير س وينتج منها انه بجعل س = ٠ فيها يوجد

$$\text{ع} = \text{لوغا}\ 1 = 0$$

ولذا نضع

$$\text{لوغا}(1+\text{س}) = \text{ع}\,\text{س} + \text{ح}\,\text{س}^2 + \text{ح}'\,\text{س}^3 + \text{ح}''\,\text{س}^4 + \ldots\ \text{الخ} \quad (1)$$

وبتغيير س بكمية ز يوجد كذلك

$$\text{لوغا}(1+\text{ز}) = \text{ع}\,\text{ز} + \text{ح}\,\text{ز}^2 + \text{ح}'\,\text{ز}^3 + \text{ح}''\,\text{ز}^4 + \ldots\ \text{الخ}$$

وحيث كانت ز حيثما اتفقت فيمكن فرض هذه المعادلة $(1+\text{س})^2$ أو $1 + 2\text{س} + \text{س}^2 = 1 + \text{ز}$ بين س و ز ثم يستخرج منها مقدار ز ويوضع في معادلة (١) فيوجد

$$\text{لوغا}(1+\text{س})^2 = \text{ع}(2\text{س}+\text{س}^2) + \text{ح}(2\text{س}+\text{س}^2)^2 + \text{ح}'(2\text{س}+\text{س}^2)^3 + \text{الخ}$$

وبواسطة الحل والترتيب بحسب قوى س يكون

لوغا

$$\text{لوغا}(١+س)^٢ = ٢ح\,س + \left.\begin{matrix} ح \\ +٤ح \end{matrix}\right\} س^٢ + \left.\begin{matrix} ٤ح \\ +٨ح \end{matrix}\right\} س^٣ + \left.\begin{matrix} ح \\ +١٢ح \\ +١٦ح \end{matrix}\right\} س^٤ + \text{الخ} \quad (٢)$$

وغير ذلك حيث ان خاصية اللوغاريتم مبينة فى هذه المعادلة لوغا $ح^ن$ = ن لوغا ح نجد

$$\text{لوغا}(١+س)^٢ = ٢(ح\,س + ح\,س^٢ + ح\,س^٣ + \cdots \text{الخ})$$

وبوضع مقدار لوغا $(١+س)^٢$ هذا فى الطرف الاوّل لمعادلة (٢) نجد معادلة تتحقق بجميع المقادير التى تعطى الى متغير س واذن يحدث بمساواة الحدود المتبوعة بقوى متحدة لحرف س بعضها.

$$٢ح = ٢ح \quad \text{و} \quad ح + ٤ح = ٢ح \quad \text{و} \quad ٤ح + ٨ح = ٢ح \ \text{الخ}$$

ويستخرج من ذلك

$$ح = -\frac{ح}{٢} \quad \text{و} \quad ح = -\frac{٢ح}{٣} = \frac{ح}{٣} \quad \text{و الخ}$$

وبوضع هذه المقادير نجد

$$\text{لوغا}(١+س) = ح\left(س + \frac{س^٢}{٢} + \frac{س^٣}{٣} + \text{الخ}\right) + ث$$

ومتى يكون س = ٠ يوجد لوغا ١ = ٠ = ث ويعلم من ذلك انه لا يوجد كمية ثابتة ينبغى اضافتها

واذا جعلنا $س = \frac{هـ}{س}$ نجد

$$\text{لوغا}\left(١+\frac{هـ}{س}\right) \quad \text{أو لوغا}\left(\frac{س+هـ}{س}\right) \quad \text{او}$$

$$\text{لوغا}(س+هـ) - \text{لوغا}\,س = ح\left(\frac{هـ}{س} + \frac{هـ^٢}{٢س^٢} + \frac{هـ^٣}{٣س^٣} + \cdots \text{الخ}\right)$$

وبالقسمة على هـ يكون

$$\frac{\text{لوغا}(س+هـ) - \text{لوغا}\,س}{هـ} = ح\left(\frac{١}{س} + \frac{هـ}{٢س^٢} + \frac{هـ^٢}{٣س^٣} + \cdots \text{الخ}\right)$$

وبالارتقاء الى النهاية نجد

$$\frac{\text{ولوغا س}}{\text{و س}} = \frac{\text{ح}}{\text{س}}$$

ومن ثم يكون تفاضل لوغا س هكذا ح $\frac{\text{و س}}{\text{س}}$ وينظر ان ثابتة ح ليست

الا القياس

* الملحوظة الثانية (بند ٢٤٥) *

على القاعدة الاساسية لطريقة المكررات الغير المتعينة

يمكن الاثبات بالوجه الآتي على انه متى تكون المعادلة التي كمعادلة

ح س٤ + ح س٣ + حَ س٢ + حً س + و = ٠ (٣) مثلا

متحققة مهما كانت س يلزم أن يكون كل من المكررات ح و ح و حَ و حً و و

صفرا لانه حيث كانت س تقبل اى مقدار كان يمكن وضع س = ٠

وتؤول معادلة (٣) حينئذ الى و = ٠

ولما كانت و غير معلقة بمتغير س فتكون صفرا ايضا متى لاتكون س

صفرا و ينتج من ذلك ان معادلة (٣) تختصر الى هذه

ح س٤ + ح س٣ + حَ س٢ + حً س = ٠

وباسقاط المضروب المشترك س يبقى

ح س٣ + ح س٢ + حَ س + حً = ٠

ثم نطبق ماذكر بخصوص معادلة (٣) على هذه المعادلة فيتضح لنا ان حً

تكون صفرا وبالمداومة هكذا يظهر على التعاقب كون المكررات الاخر

تكون كذلك

* (فى المفرودات المماثلة للامبير) *

في البحث عن منحنيات الانعكاس المستوية المسماة كوستيك

الملف المشترك لجميع الخطوط العمودية على خط منحن مستو هو المسمى

مفروده هذا المنحنى ونقطة تماس هذا الملف بكل عمود يقال لها مركز

الانحنا

الانحنا فى النقطة المطابقة لها من المنحنى المفروض والمستقيم الموصل لهاتين النقطتين يقال له نصف قطر الانحنا فى النقطة نفسها

و بالمناسبة يقال للملف الذى يحدث من تقاطع الخطوط المستقيمة الممتدة من جميع نقط المنحنى المفروض جاعلة بين عمده فى النقط بعينها زوايا ثابتة أو متغيرة بحسب شرط ما رياضى مفرودا مائلا للمنحنى المفروض و يمكن أن يقال لنقط تماس هذا الملف المستجد بكل من الخطوط المستقيمة الحادث هو منها مراكز الانحنا المائلة فى النقط المطابقة لها من المنحنى الاصلى و بالجملة يمكن أن يقال للمستقيم الموصل لهاتين النقطتين نصف قطر الانحنا المائل لهذا المنحنى فى النقطة المذكورة

فاذا كان المنحنى المفروض دائرة مثلا وكانت الزوايا التى تجعلها انصاف أقطار الانحنا المائلة مع انصاف أقطار الانحنا الاعتيادية أو العمودية ثابتة فالمفرود المائل يكون لامحالة دائرة متحدة المركز مع الاولى ولاجل أن يكون المفرود المائل فى الحالة بعينها بثبوت الزاوية نقطة يجب أن يكون المنحنى المفروض حلزونيا لوغاريتميا واذا آل هذا المنحنى المفروض الى خط مستقيم وكانت الزوايا تزداد بنسبة بعد الاعمدة عن نقطة ثابتة عليه فالمفرود المائل يكون عين المفرود العمودى للسكلويد واذن يكون هذا المفرود سكلويدا وهلم جرا

القضية العامة للمفرودات المائلة التى يتراءى عدم وقوف المهندسين عليها والتى يمكن تحصيلها ببحث آخر تؤول بغاية ما يكون من السهولة الى جملة نواتج غريبة لاتستخرج عادة بواسطة الطرق المعتادة الا بوجه شاق ولنقتصر على تبيين القوانين الاصلية التى تربط المفرودات المائلة بالمفرودات العمودية ونجرى عملها على مثال خاص بعلم الضوء فنقول

لتكن م و مَ (شكل ١ ثانى) نقطتان من منحن مفروض و ح و حَ النقطتان المطابقتان لهاتين النقطتين من مفروده العمودى وتلك النقطتان يعنى ح و حَ يكونان مراكز الانحنا فى نقطتى م و مَ وليكن أ و أَ مراكز

الانحنا المطابقة لاحد مفرودات هذا المنحنى المائلة ولكن و تقاطع $ح َم َ$ و $ا م$ هذا ونجعل نقطة $م َ$ مركزا وببعدها عن نقطة $م$ يرسم قوسا من دائرة ينتهى فى $ا$ على امتداد $ا َم َ$ ثم يرمز برمز $قو$ للقوس من المنحنى $م م َ$ المعدود من $م$ نحو $م َ$ وبرمز $قو_ا$ للقوس من المنحنى $ا ا َ$ المحسوب من $ا$ نحو $ا َ$ وبرمز $نق$ لنصف قطر الانحنا العمودى $ح م$ وبرمز $نق_ا$ لنصف قطر الانحنا المائل $ا م$ وبرمز $ب$ لزاوية $ح م ا$ الواقعة بين نصفى قطرى الانحنا هذين وبرمز $ع$ لذى الاربعة اضلاع المحدود بخطوط مستقيمة ومنحنية $م ح ح َم َ$ وبرمز $ع َ$ لذى الاربعة اضلاع $م ا ا َم َ$

فاذا فرضنا نقطة $م َ$ قريبة جدا من نقطة $م$ فنقط $ح َ$ و $ا َ$ تكون كذلك قريبة جدا لنقط $ح$ و $ا$ واقواس $ح ح َ$ و $ا ا َ$ يمكن اعتبارها كالامتدادات المستقيمة لخطى $م ح$ و $م ا$ على الولا ومساحات $م ح ح َم َ$ و $م ا ا َم َ$ يمكن اعتبارها ايضا كقطاعات بسيطة اوكمثلثات كذلك و $م ا$ كخط عمودى على $ا م$ او على $ا َم َ$ فيوجد فى هذه الحالة

$$م م َ = ى قو \quad و \quad ح ح َ = ى نق \quad و \quad ا ا َ = ى قو_ا$$

$$م َح َ = نق + ى نق \quad و \quad م َا َ = نق_ا + ى نق_ا \quad وزاوية \quad ح َم َا َ = ب + ى ب$$

ثم بعد ذلك يوجد أن

$$م ا = م م َ جتا ب = ى قو جتا ب \quad و \quad م َا = م م َ جا ب = ى قو جا ب$$

ولكن

$$ا م + م ا ا َ = ا َم َ = ا ا َ = ا َم َ + م َا$$

فيوجد بالوضع حينئذ

نق

نق + وافو = نق + وانق + وافو جاب وبالاختصار يحدث

وافو = وانق + جاب وافو .... (١)

ويوجد ايضا

زاويه م ح و = مم َ / ح َم = وافو / نق + وانق وزاويه م َ ا َ و = م ا / ا َ م = وافو جتاب / نق + وافو

ولكن بسبب تساوي زاويتي مثلثي م و ح َ و م َ و ا َ اللتين في و يوجد

زاوية و م ح َ + زاوية و ح َ م = زاوية و م َ ا َ + زاوية و ا َ م َ

واذن يكون بالاستبدال

ب + وافو / نق + وانق = (ب + واب) + وافو جتاب / نق + وافو وباسقاط

المشترك من الطرفين يكون

وافو / نق + وانق = واب + وافو جتاب / نق + وافو وبحذف المقامات يكون

(نق + وافو) وافو = (نق + وانق) (نق + وافو) واب + (نق + وانق) وافو جتاب

وبحل هذه الضروب واسقاط الحدود المشتملة على التفاضلات بدرجات

دون الواحد وقسمة جميع الحدود على وا قو يحدث

واب / وافو = ١ / نق − جتاب / نق .... (٢)

ويوجد أخيرا

قطاع م ح َ م َ = ½ مم َ × ح َ م و قطاع م ا َ م َ = ½ ا َ م َ × م ا يعني

$وع = \frac{1}{2}(نق + و نق) و قو$ و $و ع' = \frac{1}{2}(نق_1 + و نق_1)$ $و قو$ جتاب

وباسقاط الحدود المشتملة على القوى الثانية للتفاضلات يكون

$وع = \frac{1}{2}$ نق و قو .... (٣) و $وع' = \frac{1}{2}$ نق$_1$ و قو جتاب .... (٤)

وهذه القوانين الاربع الصعبة الايجاد بواسطة الطرق الاعتيادية الهندسية الحسابية تطابق للشكل كما هو مشروح رسمه ولكن يتيسر فى جميع الحالات أن تغير فيها العلامات التى تستدعى احوالا خصوصية يمكن ايجادها فيها

و يوجد لاجل المفرودين المائلين لمنحن واحد مفروض جملتان من المعادلات المتماثلة يعنى انه بالتأشير بالعلامات على الصور المتعلقة بالمفرود الثانى المائل نجد بين القوانين الاخر هذه الاربع معادلات

$و قو = و نق + و قو جاب$ .. (١) و $و قو' = و نق'_1 + و قو جاب'$ (١')

$\frac{وب}{وقو} = \frac{1}{نق} - \frac{جتاب}{نق_1}$ (٢) و $\frac{وب'}{وقو} = \frac{1}{نق} - \frac{جتاب'}{نق_1}$ (٢')

ويمكن فرض كون انصاف أقطار الانحناء لاحد الجملتين تكون الاشعة الساقطة المماس جميعها لاحد المفرودات المائلة والمنحنى المفروض يكون هو المنحنى المعكس او الفارق للمادتين المتجانستين بشدة مختلفة وكون انصاف الاقطار الانحنائية المائلة للجملة الاخرى تكون هى الاشعة المنعكسة اوالمنكسرة عند مقابلتها هذا المنحنى والمماس جميعها بالمفرود المائل الآخر الذى يكون بهذا الوجه هو الكوستيك بالانعكاس او بالانكسار حال كونه متكونا من انصاف الاقطار هذ

ولاجل ذلك يلزمنا بحسب قواعد الضوء أن نربط معادلة $\frac{جاب}{جاب'} = \frac{ف}{ف'}$ (٥)

التى فيها رمزا ف و ف' يبينان عددين ثابتين لا يختلفان فى حالة الانعكاس الخصوصية عن بعضهما الا فى الاشارة بالاربع معادلات المرقومة

اعلاه

اعلاه فباخذ تفاضل معادلة (٥) يوجد

$$ء ب جا بَ جتا ب - ء بَ جا ب جتا بَ = ٠ او$$

$$\frac{ء ب}{ء فو} جا بَ جتا ب - \frac{ء بَ}{ء فو} جا ب جتا بَ = ٠$$

وبوضع مقادير $\frac{ء ب}{ء فو}$ و $\frac{ء بَ}{ء فو}$ المستخرجة من معادلات ٢ و (٢َ)

فى هذه المعادلة عوضا عنها يوجد

$$\frac{جا ب جتا بَ}{نق_١} - \frac{جا بَ جتا ب}{نق_١} = \frac{جا(ب - بَ)}{نق} \cdots\cdots (٦)$$

وبواسطة هذا القانون الاخير يرسم بسهولة بواسطة النقط الكوستيك بالانكسار المطابق لمنحن مفروض فاصل لمادتين معروف رسم نصف قطر انحنائية فى اى نقطة منه وجميع الاشعة الساقطة له مماسة بمنحن مفروض ايضا ولنمد لاجل ذلك مستقيما يماس المنحنى الاخير ونطوله حتى يصل الى نقطة تقابله بالمنحنى الفاصل ونرسم له خطا عموديا فى هذه النقطة فيعلم طول $نق_١$ للشعاع الساقط وتعلم زاوية السقوط ب ومن ثم تعلم زاوية بَ بواسطة معادلة (٥) ويمكن حينئذ رسم جهة الشعاع المنكسر ثم يعلم بسهولة بمعادلة (٦) طول $نقَ_١$ وتتبين بهذه الكيفية نقطة من نقط الكوستيك المبحوث عنه

واذا فرض منحن تكون جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه عوضا عن معرفة المنحنى المماسة به جميع الاشعة الساقطة فان تلك الاشعة تكون مماسة بالمفرود العمودى لذلك المنحنى وبذلك تؤول المسئلة الى الحالة السابقة

وفى الحالة الخصوصية التى تكون فيها جميع الاشعة عمودية على محيط دائرة واحدة تمر تلك الاشعة بمركزها واذن يؤول المفرود المماثل الاول الى النقطة الشعاعية ويصير $نق_١$ الصورة العمومية لابعاد هذه النقطة عن جميع نقط

المنحنى الفاصل

واذا وضعنا معادلة (٦) بهذه الصورة

$$\frac{\text{جاب جتا}\,\overset{'}{\text{ب}}}{\underset{\text{ا}}{\text{نق}'}} - \frac{\text{جا}\overset{'}{\text{ب}}\,\text{جتا}\,\overset{'}{\text{ب}}}{\underset{\text{ا}}{\text{نق}}} = \frac{\text{جاب جتاب}' - \text{جاب}'\,\text{جتاب}}{\text{نق}}$$

ووضع فيها مقدار جا ب' المستخرج من معادلة (٥) عوضا عنه صارت تلك المعادلة منقسمة على جاب وتؤول الى

$$\frac{\text{ف جتا}\,\overset{'}{\text{ب}}}{\underset{\text{ا}}{\text{نق}'}} - \frac{\text{ف}'\,\text{جتا}\,\overset{'}{\text{ب}}}{\underset{\text{ا}}{\text{نق}}} = \frac{\text{ف جتاب}' - \text{ف}'\,\text{جتاب}}{\text{نق}} \cdots\cdots (٧)$$

واذا فرضنا الآن ان زاوية السقوط تكون صفرا فمعادلة (٥) تبين ان زاوية الانكسار تكون كذلك ولذا يوجد

جتاب = جتاب' = ١ وبه تؤول معادلة (٧) الى

$$\frac{\text{ف}}{\underset{\text{ا}}{\text{نق}'}} - \frac{\text{ف}'}{\underset{\text{ا}}{\text{نق}}} = \frac{\text{ف} - \text{ف}'}{\text{نق}} \cdots\cdots\cdots (٨)$$

وحينئذ متى تكون الاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة فان هذه المعادلة تحدث بالسهولة التابعة النقطة التي توجد على نصف القطر العمودي من الكوستيك بالانكسار وهذه النقطة هي التي تسمى بالنقطة الاحتراقية متى يكون المنحنى الفاصل دائرة

واذا فرض في حالة الدائرة ان النقطة الشعاعية تكون على بعد غير محدود فمعادلة (٨) تؤول الى

$$\frac{\text{ف}}{\underset{\text{ا}}{\text{نق}'}} = \frac{\text{ف} - \text{ف}'}{\text{نق}} \quad \text{الذي يستخرج منه} \quad \underset{\text{ا}}{\text{نق}'} = \frac{\text{ف}}{\text{ف} - \text{ف}'}\,\text{نق} \quad (٩)$$

وبهذا تعرف موضع النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية وتسمى هذه النقطة الاحتراقية في هذه الحالة النقطة الاحتراقية الاصلية

واذا فرض في معادلة (٨) ايضا ان الخط الفاصل يصير خطا مستقيما

أو

او ان نق يكون غير محدود آلت تلك المعادلة بالاختصار الى

$$\frac{\text{ب}}{\text{نق}_{\text{ا}}} - \frac{\text{بَ}}{\text{نقَ}_{\text{ا}}} = ٠ \quad \text{الذى يحدث منه} \quad \frac{\text{نقَ}_{\text{ا}}}{\text{نق}_{\text{ا}}} = \frac{\text{بَ}}{\text{ب}} \quad \cdots \quad (١٠)$$

وحينئذ تكون ابعاد النقطة الشعاعية والنقطة الاحتراقية عن المستقيم الفاصل فى هذه الحالة فى نسبة معاكسة لنسبة جيب السقوط الى جيب الانكسار

واذا كانت الاشعة بعد انكسارها الاول فى الحالة العمومية تصير منكسرة مرة او جملة مرات أخر بمصادمتها منحن او جملة منحنيات اخر فواصل ينظر انه حيث كان يعرف قبل كل انكسار يستجد على ما ذكر الكوستيك الذى تكون الاشعة الساقطة مماسة به فيتوصل بالانتقال من كوستيك الى آخر بواسطة الطرق التى شرحناها الى رسم الكوستيك الاخير بالنقط واذن يمكن اعتبار معادلتى (٥) و (٦) كخاصتين لان يعرف بهما بواسطة النقط الكوستيك الناتج من انكسارات متعاقبة كيف ما يراد

ولاجل أن نقف على كيفية سهلة تنهى لنا امثلة مفيدة زيادة على ما تقدم نفرض سطحين فاصلين فقطبان نرمز برمز نقً لبعد نقطة السقوط المستجدة عن النقطة التى يماس فيها الشعاع الثانى الساقط المفروض المائل الثانى ونرمز نقَ لنصف قطر الانحنا للمنحنى الفاصل المستجد فى نقطة السقوط ونرمز نقً لطول الشعاع المنكسر ثانيا والمحسوب من نقطة السقوط الثانية الى نقطة تماسه بالمفروض الثالث المائل وبالجملة فنرمز برموز بً و بً الزوايا السقوط الثانى والانكسار الثانى وهى التى نفرض جيوبها مناسبة الى فً و فً فنجد بناء على (٥) و (٧) هذه الاربع معادلات

$$\frac{\text{جاب}}{\text{جاب}'} = \frac{\text{ف}}{\text{ف}'} \quad \text{و} \quad \frac{\text{جاب}'}{\text{جاب}''} = \frac{\text{ف}'}{\text{ف}''}$$

$$\frac{\text{ف جتا ا ب}'}{\text{نق}'_{1}} - \frac{\text{ف}'\text{ جتا ا ب}}{\text{نق}_{1}} = \frac{\text{ف جتاب}' - \text{ف}'\text{ جتاب}}{\text{نق}'}$$

$$\frac{\text{ف}'\text{ جتا ا ب}''}{\text{نق}''_{1}} - \frac{\text{ف}''\text{ جتا ا ب}'}{\text{نق}'_{1}} = \frac{\text{ف}'\text{ جتاب}'' - \text{ف}''\text{ جتاب}'}{\text{نق}''}$$

ويستخرج من الاخيرتين

$$\text{نق}'_{1} = \frac{\text{ف جتا ا ب}'}{\frac{\text{ف}'\text{ جتا ا ب}}{\text{نق}_{1}} + \frac{\text{ف جتاب}' - \text{ف}'\text{ جتاب}}{\text{نق}'}}$$

$$\text{نق}'_{1} = \frac{\text{ف}''\text{ جتا ا ب}'}{\frac{\text{ف}'\text{ جتا ا ب}''}{\text{نق}''_{1}} - \frac{\text{ف}'\text{ جتاب}'' - \text{ف}''\text{ جتاب}'}{\text{نق}''}}$$

ولكن هنا $\text{نق}'_{1}$ و $\text{نق}'_{1}$ لهما جهة واحدة تشتمل على نقطتى السقوط فاذن يكون البعد بين هاتين النقطتين الاخيرتين مساويا لجمعهما او لفرقهما وبالرمز بحرف هـ' لهذا البعد يوجد حينئذ

$$\text{هـ}' = \frac{\text{ف}''\text{ جتا ا ب}'}{\frac{\text{ف}'\text{ جتا ا ب}''}{\text{نق}''_{1}} - \frac{\text{ف}'\text{ جتاب}'' - \text{ف}''\text{ جتاب}'}{\text{نق}''}} \pm \frac{\text{ف جتا ا ب}'}{\frac{\text{ف}'\text{ جتا ا ب}}{\text{نق}_{1}} + \frac{\text{ف جتاب}' - \text{ف}'\text{ جتاب}}{\text{نق}'}} \quad (11)$$

وهو القانون الذى يخدم باعتبار $\text{نق}''_{1}$ فيه مجهولا لايجاد الكوستيك الذى يحدث من انكسارين متواليين بالنقط بلا واسطة من غير الاحتياج الى رسم الكوستيك المتوسط

اذا كان السطحان الفاصلان وجهين لجسم واحد شفاف يلزم أن تربط بمعادلة (١١) المعادلة المضاعفة هذه

جايه

$$\frac{\text{جاب}}{\text{جاب}'} = \frac{\text{جاب}''}{\text{جاب}''{}'} = \frac{\text{ف}}{\text{ف}'} \quad \ldots\ldots \quad (١٢)$$

واذن يمكن اعتبار جملة هاتين المعادلتين كداخل فيها جميع قضايا العدسات باى جنس يراد تعيين نقط الاحتراق فيه من غير اهمال اعتبار سمكها كما يفعل فى العادة

ويستخرج من معادلتى (١) و (١َ) بالتحويل و بالقسمة

$$\frac{\text{و}_1\text{قو} - \text{و}_1\text{نق}}{\text{و}_1\text{قو}' - \text{و}_1\text{نق}'} = \frac{\text{جاب}}{\text{جاب}'} = \frac{\text{ف}}{\text{ف}'}$$ الذى يستخرج منه

$$\frac{\text{و}_1\text{قو} - \text{و}_1\text{نق}}{\text{ى}} = \frac{\text{و}_1\text{قو}' - \text{و}_1\text{نق}'}{\text{ى}'}$$ ويحدث من ذلك باخذ التكامل

$$\frac{\text{قو}_1 - \text{نق}_1}{\text{ى}} - \frac{\text{قو}'_1 - \text{نق}'_1}{\text{ى}'} = \text{ث} \,.$$

و ث هى الثابتة الحيث ما اتفقت فاذا ابتدأ قوسا قو_1 و $\text{قو}'_1$ معا و بينت الاشعة الساقطة و المنكسرة الموافقة الى مبدأيهما برمزى نق و نقَ يوجد

$$-\frac{\text{نق}}{\text{ى}} + \frac{\text{نق}'}{\text{ى}'} = \text{ث}$$ الذى يستخرج منه بالاسقاط و التحويل

$$\frac{\text{قو}_1 + \text{نق} - \text{نق}_1}{\text{ى}} = \frac{\text{قو}'_1 + \text{نق}' - \text{نق}'_1}{\text{ى}'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٣)$$

واذا طلب ما يكون المنحنى الفاصل حتى تجتمع الاشعة الصادرة من نقطة وتتلاقى بعد انكسارها فى نقطة اخرى يلزم وضع $\text{قو}_1 = ٠$ و $\text{قو}'_1 = ٠$

تصير معادلة (١٣) بهذا السبب ايلة الى

$$\frac{نق_١}{ى} - \frac{نق_١'}{ى'} = \frac{نق}{ف} - \frac{نق'}{ف'} = \text{ثابتة} \quad \cdots\cdots \quad (١٤)$$

وهذه هي المعادلة او الارتباط الكائن بين ابعاد $نق_١$ و $نق_١'$ لنقط مختلفة من المنحنى المطلوب عن نقطتين ثابتتين معلومتين فينتج من ذلك بسهولة ان معادلة ذلك المنحنى باحداثيات عمودية ترتفع الى الدرجة الرابعة وانواع هذه المنحنيات كانت مسماة خطوط ابلانيتيك للمعلم كتلى الذى هيأ لها جملة مباحث غريبة فى مراسلاته وفى كتبه أو دفاتره الخاصة

وجميع ماذكر يطبق بلاواسطة على الانعكاس بفرض $ب' = - ب$ فقط الذى ينتج منه

$$جاب' = - جاب \text{ و } جتاب' = جتاب \text{ و } ف' = - ف$$

وحينئذ متى كانت الاشعة الساقطة مماسة بكليتها لمنحنٍ واحد ورمزنا برمز $نق_١$ لطول الشعاع الساقط المحسوب من ابتدا هذا المنحنى الى نقطة السقوط وبرمز $نق_١'$ لطول الشعاع المنعكس المحسوب من ابتدا نقطة السقوط الى الكوستيك ورمزنا اخيرا برمز نق لنصف قطر الانحنا للمنحنى المعكس فى نقط السقوط توجد معادلة (٦) هكذا

$$\frac{١}{نق_١} + \frac{١}{نق_١'} = \frac{٢}{نق\ جتاب} \quad \cdots\cdots \quad (١٥)$$

وهو قانون سهل لاجل رسم الكوستيك بالانعكاس بواسطة النقط متى يعلم المنحنى المعكس والمنحنى الذى تماسه الاشعة الساقطة وترجع الى هذه المسئلة المسئلة التى يعلم فيها منحنى جميع الاشعة الساقطة عمودية عليه واذا اعتبرنا الشعاع الساقط العمودى على المنحنى المعكس بحدته توجد معادلة (٨) هكذا

$$\frac{١}{نق_١} + \frac{١}{نق'} = \frac{٢}{نق} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (١٦)$$

وبذلك

و بذلك تتعين النقطة الاحتراقية فى المرائيات الدائرية و اذا أريد النقطة الاحتراقية الاصلية او النقطة الاحتراقية للاشعة المتوازية توجد معادلة (٩)

$$\text{نق}'_{١} = \frac{\text{نق}}{٢} \quad \cdots\cdots \quad (١٧)$$

واذا صار الخط المعكس مستقيما وكانت النقطة الشعاعية حيث ما اتفقت حدث

$$\text{نق}'_{١} = - \text{نق}_{١} \quad \cdots\cdots \quad (١٨)$$

و بالجملة فيتوصل بواسطة معادلة (١٥) الى تعيين جهة الكوستيك الذى يحدث من عدد انعكاسات متوالية حيث ما اتفق بدون الاحتياج الى رسم الكوستيكات المتوسطة واما من قبل الخط الابلانيتيك بالانعكاس فانه يكون معلوما (١٤) بمعادلة

$$\text{نق}_{١} + \text{نق}'_{١} = \text{ثابتة}$$

يعنى ان هذا الخط يكون قطعا ناقصا اوقطعا زائدا بحسب كون نق$_{١}$ و نق$'_{١}$ متحدة فى الاشارة او مختلفة فيها وعلى ذلك يكون قطعا مكافئا متى كانت احدى النقطتين الثابتتين بعيدة الغاية والنهاية

اذا فرض نق نق ثابتا فى قوانين (٦) و (٧) ووضع قو$_{١}$ = ٠ فيها فان هذه القوانين تدخل وتنحصر فى قوانين المعلم بوتيت المشهورة فى مراسلاته للمعلم هاشيت فى شأن الحالة التى يكون فيها المنحنى المعكس او الفاصل دائرة والاشعة الساقطة صادرة من نقطة واحدة ولكن يرى هنا كذلك اكون هذه القوانين لها مدلولات متسعة

ومن العجايب ان بوتيت لم يفتكر فى شرحها و بسطها على ما ينبغى فانه كان يمكنه أن يعتبر فى الحقيقة انه متى تنعكس او تنكسر الاشعة الساقطة المماسة بمنحن ما يقابلتها منحن آخر حيث ما اتفق يمكن نظر احد هذه الاشعة كصادر من

نقطة تماسه بالاول من هذين المنحنيين ونقطة سقوطه كاحدى نقط الدائرة الالتصاقية للمنحنى الثانى بمعنى أن القوانين المتشابهة لاجل الدائرة ولاجل الاشعة الساقطة من نقطة واحدة لاتزال موجودة ايضا بابدال نصف قطر الدائرة بنصف قطر الانحنا فى نقطة السقوط للمنحنى الذى هى الدائرة الالتصاقية له وبابدال بعد نقطة السقوط عن النقطة الشعاعية ببعد نقطة السقوط هذه عن نقطة تماس الشعاع الآتى اليها بالمنحنى المحيط بجميع الاشعة الساقطة وبغاية الضبط ينتقل من قضية التحرك فى الدائرة فى علم الميكانيكا الى قضية التحرك بطول منحن ما بالوجه المشروح عينه

انتهى

المهندسون الاولون الذين اشتغلوا بقضية الكوستيكات لم يصيبوا فى ظنهم حيث تخيلوا انهم امكان ابدال المنحنى المعكس او الفاصل بالمماس له فى نقطة السقوط وانما تبين مطابقة قوانين لاسير بقوانين وثبت جواز ابدال هذا المنحنى بدائرته الالتصاقية فى نقطة السقوط